

HÁNY OSZTÓJA VAN EGY ADOTT SZÁMNAK?

Dr. TÓTH LÁSZLÓ

<http://www.ttk.pte.hu/matek/ltoth>

előadásanyag, Pécsi Tudományegyetem, TTK

2008. április

1. Bevezetés

- **Hány osztója van egy adott számnak?**
- Lehetséges válaszok:
 - i) Azt nem lehet megmondani!
 - ii) Attól függ!
 - iii) Van olyan szám, amelynek sok osztója van és van olyan, amelynek kevés!
 - iv) Milyen számról van szó?
 - v) Milyen osztókat nézünk?
- Viszontválaszok:
 - i) Mondjunk azért valamit.
 - ii) Igen, de vajon mitől függ?
 - iii) Melyek azok a számok, amelynek sok osztójuk van és melyek azok, amelyeknek kevés?
 - iv) Egy adott pozitív egész számról.
 - v) Az összes pozitív osztót.

2. Adatgyűjtés

$n = 1$ osztói: 1, osztók száma: 1
 $n = 2$ osztói: 1, 2, osztók száma: 2
 $n = 3$ osztói: 1, 3, osztók száma: 2
 $n = 4$ osztói: 1, 2, 4, osztók száma: 3
 $n = 5$ osztói: 1, 5, osztók száma: 2
 $n = 6$ osztói: 1, 2, 3, 6, osztók száma: 4
 $n = 7$ osztói: 1, 7, osztók száma: 2
 $n = 8$ osztói: 1, 2, 4, 8, osztók száma: 4
 $n = 36$ osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, osztók száma: 9
 $n = 120$ osztói: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120, osztók száma: 16
 $n = 124576000$ osztói: ???

3. Mit mond a Maple?

```
>with(numtheory): tau(120); # osztok száma
16

> tau(124576000);
144

> ifactor(120); ifactor(123456700); # primtenyezokre bontas
(2)^3 (3) (5)
(2)^2 (5)^2 (127) (9721)

> divisors(120); # osztok halmaza
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30,
40, 60, 120}

> seq([n,tau(n)],n=1..12); # az osztok szamanak sorozata
[1, 1], [2, 2], [3, 2], [4, 3], [5, 2], [6, 4],
[7, 2], [8, 4], [9, 3], [10, 4], [11, 2], [12, 6]
```

```
> divisors(124576000);
```

```
{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 17, 20, 25, 32, 34, 40, 50, 64, 68, 80, 85,
100, 125, 128, 136, 160, 170, 1000, 124576000, 1557200, 3893, 19465,
229, 2000, 272000, 544000, 62288000, 256, 250, 500, 200, 400, 800,
4000, 320, 1600, 8000, 640, 16000, 32000, 3200, 1280, 6400, 272,
340, 425, 544, 17000, 34000, 680, 850, 1088, 1360, 1700, 2125, 2176,
2720, 4352, 4250, 8500, 3400, 6800, 5440, 13600, 68000, 27200,
136000, 10880, 54400, 21760, 458, 916, 1145, 1832, 2290, 3664, 4580,
5725, 108800, 7328, 7786, 9160, 11450, 14656, 15572, 18320, 22900,
28625, 29312, 31144, 36640, 38930, 229000, 458000, 58624, 57250,
114500, 45800, 91600, 183200, 916000, 3664000, 7328000, 3893000,
7786000, 3114400, 15572000, 6228800, 31144000, 2491520, 12457600,
4983040, 24915200, 73280, 366400, 1832000, 146560, 732800, 293120,
1465600, 62288, 77860, 97325, 124576, 155720, 194650, 249152,
311440, 389300, 486625, 498304, 622880, 996608, 973250, 1946500,
778600, 1245760}
```

4. Képlet az osztók számára

- **Tétel.** Legyen az $n > 1$ egész szám kanonikus alakja

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}.$$

- i) Egy d szám akkor és csak akkor osztója n -nek, ha d kanonikus alakja

$$d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_r^{b_r},$$

ahol $0 \leq b_1 \leq a_1, 0 \leq b_2 \leq a_2, \dots, 0 \leq b_r \leq a_r$.

- ii) Az n pozitív osztóinak száma: $\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$.

Bizonyítás. Ha $d \mid n$, akkor $n = dq$, így d kanonikus alakjában csak a p_i prímek szerepelhetnek és legfeljebb a_i -hatványon, $1 \leq i \leq r$, tehát d kanonikus alakja a megadott. Fordítva, ha d kanonikus alakja a fenti, akkor a

$$q = p_1^{a_1 - b_1} p_2^{a_2 - b_2} \cdots p_r^{a_r - b_r}$$

jelöléssel $n = dq$, és mivel $b_i \leq a_i$, kapjuk, hogy $a_i - b_i \geq 0$, tehát q egész szám, azaz $d \mid n$.

Ahhoz, hogy n összes pozitív osztóit megkapjuk a b_i kitevőket egymástól függetlenül, $(a_i + 1)$ -féleképpen választhatjuk meg, így $\tau(n)$ e számok szorzata.

5. Vége az előadásnak? Mit lehet még vizsgálni?

- Egy várúr börtönének 400 cellájában egy-egy rab sínylődött. A várúr a születésnapján elhatározta, hogy szabadon enged néhány rabot. Elküldte az első őrt, hogy nyissa ki a cellákat. Rögtön utána elküldte a második őrt, hogy minden második cellát zárjon vissza, a harmadik őrt, hogy minden harmadik cella zárján fordítson egyet (ha nyitva volt zárja vissza, ha zárva volt nyissa ki), ..., elküldte a k -adik őrt, hogy minden k -adik cella zárján fordítson egyet, ..., végül elküldte a 400-adik őrt, hogy a 400-adik cella zárján fordítson egyet.

Hány rab lett szabad?

1. rab, őrt: 1 ↑
2. rab, őrt: 1,2
3. rab, őrt: 1,3
4. rab, őrt: 1,2,4 ↑
5. rab, őrt: 1,5
6. rab, őrt: 1,2,3,6
- ???

- **Megoldás.** Azok a rabok lesznek szabadok, amelyek celláinak sorszáma páratlan sok osztóval rendelkezik, azaz $\tau(n)$ páratlan szám. Ilyenek az 1, 4, 9, 16, Ezek pontosan a négyzetszámok. ▼ Igazoljuk ezt!

Így pontosan 20 rab lesz szabad.

Vizsgáljuk a $\tau(n)$ függvény tulajdonságait!

- $\tau(n)$ multiplikatív függvény, azaz $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ minden $(m, n) = 1$ esetén.
- Milyen értékeket vesz fel $\tau(n)$, ha $n \geq 1$?
- Felvesz-e $\tau(n)$ minden pozitív egész értéket?

Igen, mert bármely $a \geq 1$ -re $\tau(2^{a-1}) = a$. Mi több, minden a értéket végtelen sokszor felvesz, mert $\tau(p^{a-1}) = a$ minden p^{a-1} prímszakra.

- Kérdés, hogy $\tau(n)$ az n -től függően milyen „nagy” értékeket vehet fel?

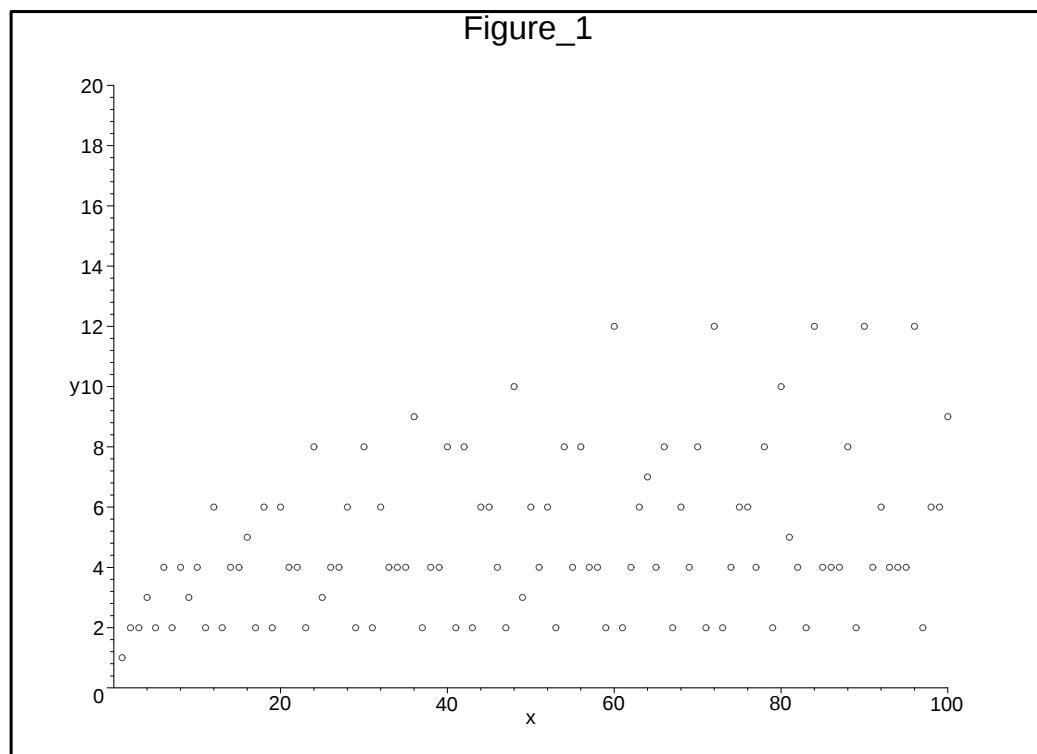
Egyrészt minden p prímre $\tau(p) = 2$.

Ugyanakkor nyilván $2 \leq \tau(n) \leq n$, sőt $2 \leq \tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ minden $n \geq 2$ -re.

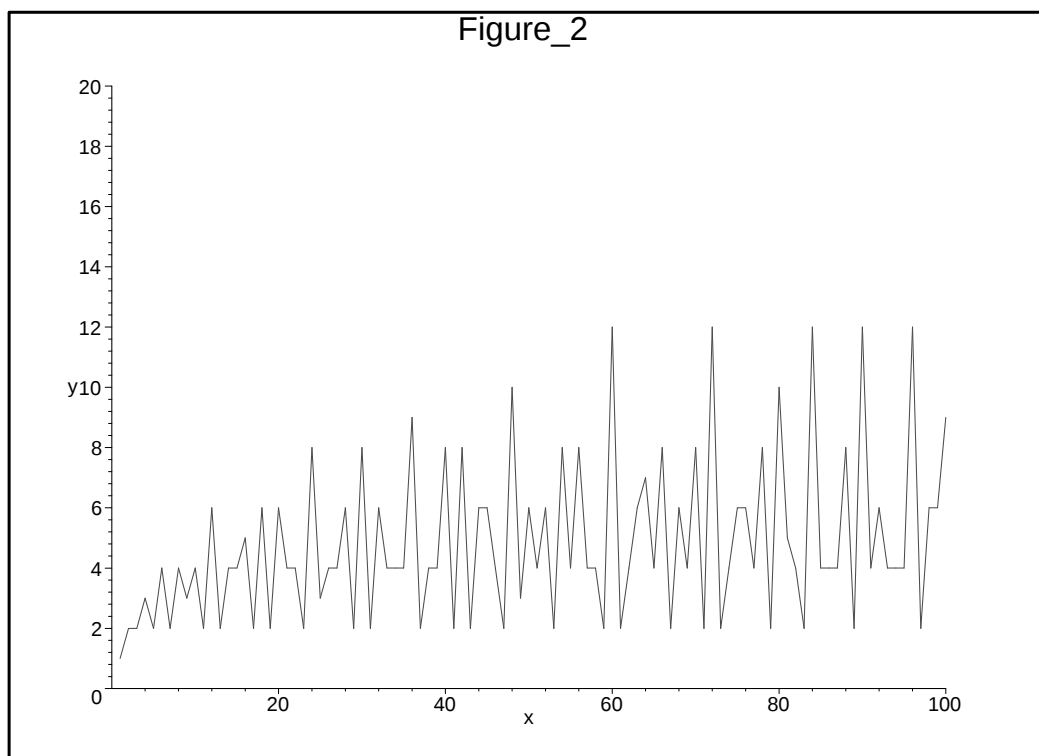
• $\tau(n)$ nagyon szabálytalanul viselkedik ..., igazolható, hogy grafikonjában tetszőlegesen „mély völgyek” és „magas hegyek” vannak, ...

- A $\tau(n)$ függvény grafikonja:

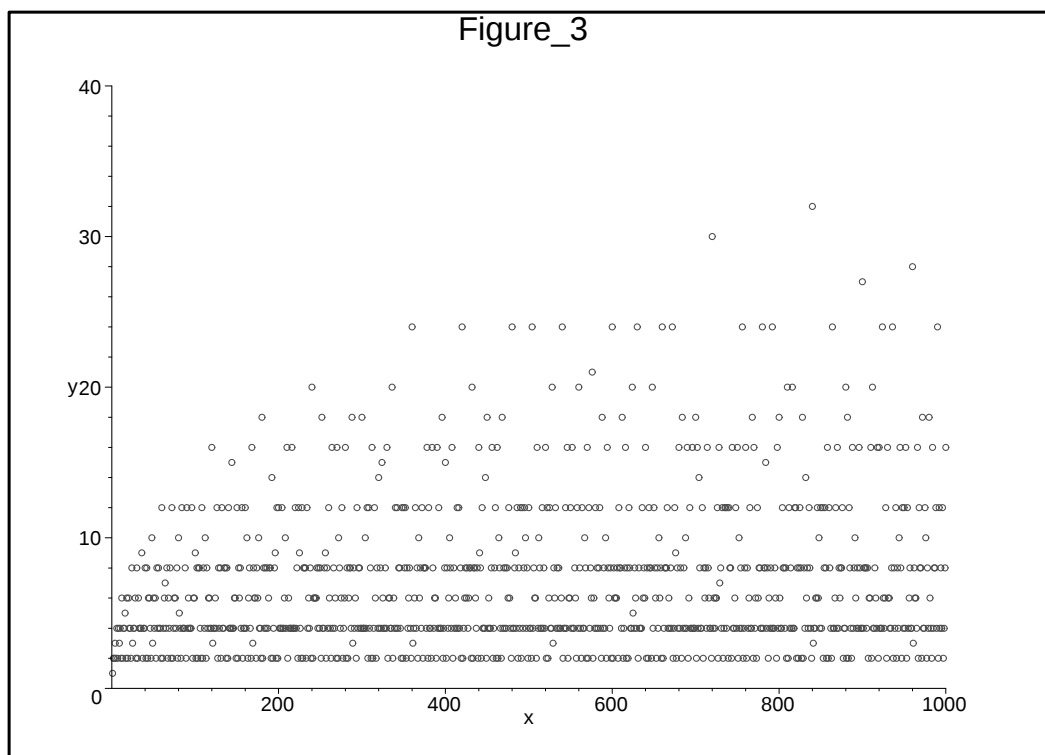
1. ábra: a $\tau(n)$ értékek, ha $n = 1, 2, \dots, 100$



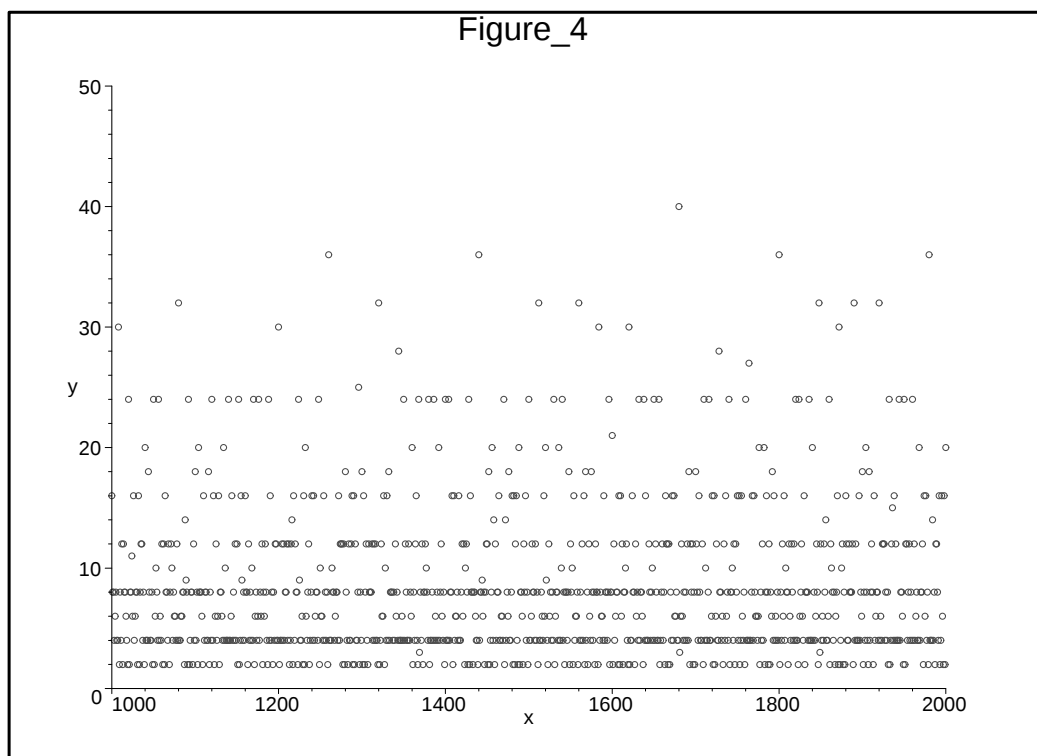
2. ábra: a $\tau(n)$ értékek, ha $n = 1, 2, \dots, 100$, összekötve az egymást követő pontokat



3. ábra: a $\tau(n)$ értékek, ha $n = 1, 2, \dots, 1000$



4. ábra: a $\tau(n)$ értékek, ha $n = 1000, \dots, 2000$



- $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$, $\forall n \geq 2$ igazolása:

Az n osztóiból alkossunk rendezett párokat úgy, hogy minden d osztó párja legyen az n/d komplementer osztó és az első tag legyen kisebb vagy egyenlő, mint a második. Itt a $\langle d, n/d \rangle$ párra $d \leq n/d$, ahonnan $d^2 \leq n$, $d \leq \sqrt{n}$, tehát a párok száma legfeljebb $\sqrt{n}$. Ezekben minden osztó pontosan egyszer szerepel, kivéve ha n négyzetszám, mert akkor $\langle \sqrt{n}, \sqrt{n} \rangle$ egy ilyen pár. Kapjuk, hogy $\tau(n)$ legfeljebb annyi, mint a párok számának kétszerese, tehát legfeljebb $2\sqrt{n}$.

Pl. $n = 24$ -re az osztópárok: $\langle 1, 24 \rangle$, $\langle 2, 12 \rangle$, $\langle 3, 8 \rangle$, $\langle 4, 6 \rangle$.

- Lehet-e javítani a $\tau(n)$ -re vonatkozó alsó és felső korlátot?

6. $\tau(n)$ értékeinek becslése

- Igazolható, hogy

$\tau(n) \leq C_3 \sqrt[3]{n}$, minden elég nagy n -re, ahol C_3 egy alkalmas állandó,

$\tau(n) \leq C_4 \sqrt[4]{n}$, minden elég nagy n -re, ahol C_4 egy alkalmas állandó,

.....

$\tau(n) \leq C_k \sqrt[k]{n}$, minden elég nagy n -re, ahol C_k egy alkalmas állandó, és k tetszőleges.

- Jelölések:

(1) $f(n) = O(g(n))$, ha $f(n) \leq Cg(n)$ minden elég nagy n -re, ahol C egy alkalmas állandó, azaz $f(n)/g(n) \leq C$ korlátos, ha $n \rightarrow \infty$,

[olvasd: „ $f(n)$ egyenlő nagy $O(g(n))$ ”].

(2) $f(n) = o(g(n))$, ha $f(n)/g(n) \rightarrow 0$, mikor $n \rightarrow \infty$,

[olvasd: „ $f(n)$ egyenlő kis $o(g(n))$ ”].

Itt (2) $\implies$ (1), és fordítva nem igaz.

- **Tétel.** Minden $\varepsilon > 0$ esetén

$\tau(n) = O(n^\varepsilon)$, azaz $\tau(n) \leq Cn^\varepsilon$, pontosabban:

$\tau(n) = o(n^\varepsilon)$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = 0$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Használjuk a következő jelölést: $p^a || n$, ha $p^a \mid n$ és $p^{a+1} \nmid n$. Minden $n \geq 2$ -re

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{p^a || n} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}} = \prod_{\substack{p^a || n \\ a+1 \leq p^{a\varepsilon}}} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}} \prod_{\substack{p^a || n \\ a+1 > p^{a\varepsilon}}} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}} \leq \prod_{\substack{p^a || n \\ a+1 > p^{a\varepsilon}}} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}} \leq \prod_{\substack{p^a || n \\ p < e^{1/\varepsilon}}} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}},$$

ahol $a+1 > p^{a\varepsilon} \Rightarrow a\varepsilon \log p < \log(a+1) < a \Rightarrow \log p < 1/\varepsilon$, így az utolsó szorzatnak véges sok tényezője van. Kapjuk, hogy

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} \leq \left(\max_{a \geq 1} \frac{a+1}{2^{a\varepsilon}} \right)^{e^{1/\varepsilon}} = C = \text{állandó},$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\tau(n) \leq Cn^\varepsilon$, azaz $\tau(n) = O(n^\varepsilon)$. Ez ε helyett $\varepsilon/2$ -re is igaz: $\tau(n) \leq C'n^{\varepsilon/2}$ és így

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} \leq C'n^{-\varepsilon/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Most megmutatjuk, hogy $\tau(n) \neq O((\log n)^\varepsilon)$, pontosabban

• **Tétel.** Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $(n_k)_{k \geq 1}$ sorozat, amelyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau(n_k)}{(\log n_k)^\varepsilon} = \infty.$$

Bizonyítás. Próbálkozzunk az $n_k = 2^k$ sorozattal. Ekkor

$$\frac{\tau(n_k)}{(\log n_k)^\varepsilon} = \frac{k+1}{k^\varepsilon (\log 2)^\varepsilon} \rightarrow \infty, \quad \text{mikor } k \rightarrow \infty,$$

ha $\varepsilon < 1$.

Ha $\varepsilon \geq 1$ legyen $m = \lceil \varepsilon \rceil$ és $n_k = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_{m+1})^k$, ahol p_{m+1} az $(m+1)$ -edik prímszám. Így

$$\tau(n_k) = (k+1)^{m+1} > k^{m+1} = \left(\frac{\log(2 \cdot 3 \cdots p_{m+1})^k}{\log(2 \cdot 3 \cdots p_{m+1})} \right)^{m+1} = C(\log n_k)^{m+1},$$

ahol C nem függ a k -től. Kapjuk, hogy

$$\frac{\tau(n_k)}{(\log n_k)^\varepsilon} > C(\log n_k)^{m+1-\varepsilon} \rightarrow \infty,$$

mert $m+1-\varepsilon > 0$.

7. $\tau(n)$ középértéke

- Vizsgáljuk az $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau(k)$ számtani közepárányost. Ez jól közelíthető a $\log n = \ln n$ logaritmus-függvénnyel.
- Jelölés: $f(n) \sim g(n)$, ha $f(n)/g(n) \rightarrow 1$, mikor $n \rightarrow \infty$, [olvasd: „ $f(n)$ aszimptotikusan egyenlő $g(n)$ -nel”].
- Igazoljuk, hogy $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau(k) \sim \log n$.

Ez meglepő, mert a $\tau(k)$ értékek nagyon szabálytalanul változnak, de az első n érték számtani közepe nagyon szépen, szabályosan viselkedik!

Pontosabban:

• **Tétel.** Létezik olyan $C_1 > 0$ valós szám, hogy

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau(k) - \log n \right| < C_1$$

minden $n \geq 2$ esetén (választható $C_1 = 1$), továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^n \tau(k) = 1.$$

Következik, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau(k) = \log n + O(1), \quad \text{azaz} \quad \sum_{k=1}^n \tau(k) = n \log n + O(n).$$

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy $\sum_{i=1}^n \tau(i) = \sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$.

Tekintsük az $A = (a_{ij})$ $n \times n$ típusú mátrixot, ahol $a_{ij} = 1$, ha $j \mid i$ és $a_{ij} = 0$, ha $j \nmid i$. Pl. $n = 6$ -ra az A mátrix a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a mátrix elemeinek az összegét!

Sorok szerint: az i -edik sorban annyi 1-es van, ahányszor $j \mid i$, azaz $\tau(i)$, így az elemek összege (az 1-esek száma) $\sum_{i=1}^n \tau(i)$.

Oszlopok szerint: a j -edik oszlopban annyi 1-es van, ahányszor $j \mid i$, azaz ahány többszöröse van j -nek és ez a szám $\lfloor n/j \rfloor$, mert a többszörösök ezek: $j, 2j, \dots, kj$, ahol $kj \leq n < (k+1)j$, innen $k \leq n/j < k+1$, azaz $k = \lfloor n/j \rfloor$. Így az elemek összege (az 1-esek száma) $\sum_{j=1}^n \lfloor n/j \rfloor$.

Tehát

$$S(n) := \sum_{i=1}^n \tau(i) = \sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor.$$

Elhagyva az egészszerest,

$$\frac{1}{n} S(n) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} < 1 + \log n$$

és

$$\frac{1}{n} S(n) > \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{n}{j} - 1 \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - 1 > \log n - 1,$$

ahonnan

$$-1 < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau(k) - \log n < 1.$$

• Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ függvény átlagértéke vagy középértéke a g függvény (ahol g kifejezhető elemi függvényekkel és g -nek ismerjük az aszimptotikus viselkedését), ha

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) \sim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(k), \quad \text{azaz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{\sum_{k=1}^n g(k)} = 1.$$

• Ismert $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log k \sim \log n$, ez következménye az $(n/e)^n < n! < n^n$ ($n \geq 2$) egyenlőtlenségeknek (STIRLING-képlet).

• Következik: **A $\tau(n)$ függvény átlagértéke $\log n$.**

Igazolható a következő pontosabb eredmény:

• **Tétel.** (DIRICHLET, 1849)

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x(\log x + 2C - 1) + R(x),$$

ahol $C \approx 0,5772$ az Euler-állandó és $R(x) = O(\sqrt{x})$.

- Az $R(x) = O(\sqrt{x})$ eredmény tovább javítható, G. VORONJ 1903-ban igazolta, hogy $R(x) = O(x^{1/3} \log x)$, ugyanakkor G. H. HARDY és E. LANDAU 1915-ben egymástól függetlenül megmutatták, hogy $R(x) \neq O(x^{1/4})$.

- Legyen λ az $R(x) = O(x^\ell)$ feltételnek eleget tevő ℓ kitevők infimuma. Nem ismert λ pontos értéke, azaz $R(x)$ pontos nagyságrendje. Ez a Dirichlet-féle osztóprobléma. Általánosan elfogadott az a sejtés, hogy $\lambda = 1/4$. A legjobb felső korlát M. N. HUXLEY eredménye (2003): $\lambda \leq 131/416 \approx 0,3149$.

8. $\tau(n)$ maximális nagyságrendje

- Legyen f egy számelméleti függvény, g pedig egy növekvő függvény, melyre $g(n) > 0$, ha $n \geq n_0$. Azt mondjuk, hogy $f(n)$ maximális nagyságrendje $g(n)$, ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

- Ez azt jelenti, hogy

- minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $N(\varepsilon)$ úgy, hogy minden $n \geq N(\varepsilon)$ -ra $f(n) < (1 + \varepsilon)g(n)$, és
- minden $\varepsilon > 0$ esetén $f(n) > (1 - \varepsilon)g(n)$ végtelen sok n -re.

- **Tétel.** A $\log \tau(n)$ függvény maximális nagyságrendje $\frac{\log 2 \log n}{\log \log n}$, azaz

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau(n) \log \log n}{\log n} = \log 2.$$

- Következik, hogy: Minden $\varepsilon > 0$ esetén ha $n \geq N(\varepsilon)$, akkor

$$\tau(n) < n^{(1+\varepsilon) \log 2 / \log \log n}$$

és végtelen sok n -re

$$\tau(n) > n^{(1-\varepsilon) \log 2 / \log \log n}.$$

9. $\tau(n)$ normális nagyságrendje

- Legyen $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ egy számelméleti függvény. A $g : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ növekvő függvény az f normális nagyságrendje, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |f(n) - g(n)| < \varepsilon g(n)$$

igaz majdnem minden n -re, azaz igaz egy 1 sűrűségű halmazon.

Itt egy $B \subseteq \mathbb{N}$ részhalmaz sűrűsége $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \# \{n \leq x : n \in B\}$, feltéve, hogy ez a határérték létezik.

Az átlagértékkel ellentétben a normális nagyságrend magát az f függvényt approximálja, de nem feltétlen minden n -re (egy nulla sűrűségű halmaz kivételével).

A normális nagyságrend egyfajta „legvalószínűbb” értéket jelent.

- **Tétel.** A $\log \tau(n)$ függvény normális nagyságrendje $(\log 2) \log \log n$.

- Ez azt jelenti, hogy: Minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$(\log n)^{\log 2 - \varepsilon} < \tau(n) < (\log n)^{\log 2 + \varepsilon}$$

majdnem minden n -re, tehát a „legtöbb” számnak kb. $(\log n)^{\log 2} \approx (\log n)^{0,6931}$ számú osztója van.

Ugyanakkor $\tau(n)$ átlagértéke $\log n$, aminek az a magyarázata, hogy a $\sum_{n \leq x} \tau(n)$ összeg értékét olyan „abnormális” n -ek dominálják, amelyek száma kicsi, és amelyekre $\tau(n)$ nagy.

10. Speciális osztók

- Vizsgálhatók egy adott szám páratlan osztói, páros osztói, prímosztói, stb. és ezek száma.

- A d számot az n szám unitér osztójának vagy blokk-osztójának nevezzük, ha $d \mid n$ és $(d, n/d) = 1$. Jelölés: $d \parallel n$. Például $4 \parallel 12$, de $2 \nparallel 12$.

Azonnali, hogy egy p^a prímszám hatvány unitér osztói 1 és p^a , továbbá ha $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} > 1$, akkor n unitér osztói a $d = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ számok, ahol $b_i = 0$ vagy $b_i = a_i$ minden i -re.

Megjegyezzük, hogy $1 \parallel n$ és $n \parallel n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

Jelölje $\tau^*(n) = \sum_{d \parallel n} 1$ az n unitér osztóinak számát. Akkor

- A $\tau^*(n)$ függvény multiplikatív és ha $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, akkor

$$\tau^*(n) = 2^r.$$

- A $d = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ számot az $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} > 1$ szám exponenciális osztójának nevezzük, ha $b_1 \mid a_1, \dots, b_r \mid a_r$. Jelölés: $d \mid_e n$. Például $3 \mid_e 3^5$, de $3^2 \nmid_e 3^5$.

Megállapodás szerint $1 \mid_e 1$. Megjegyezzük, hogy $n \mid_e n$ minden $n \geq 1$ -re és $1 \nmid_e n$, ha $n > 1$.

Jelölje $\tau^{(e)}(n) = \sum_{d \mid_e n} 1$ az n exponenciális-osztóinak számát. Akkor

- A $\tau^{(e)}(n)$ függvény multiplikatív és ha $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, akkor

$$\tau^{(e)}(n) = \tau(a_1) \cdots \tau(a_r).$$

11. Vissza a $\tau(n)$ függvényhez

1. ▼ Az n számot **tau-számnak** nevezzük, ha $\tau(n) \mid n$. A tau-számok sorozata: 1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 40, 56, 60, Igazoljuk, hogy

- Minden páratlan tau-szám teljes négyzet.
- Ha n páratlan, akkor n tau-szám $\Leftrightarrow 2n$ tau-szám.
- Ha $(m, n) = 1$ és m, n tau-számok, akkor mn tau-szám.
- Végtelen sok tau-szám van.

Megoldás. i)-iii) azonnali a definíció alapján. Pl. i) Ha n tau-szám és n páratlan, akkor $\tau(n)$ is páratlan, és ekkor n teljes négyzet.

iv) Legyen p tetszőleges prím és $k \geq 1$, akkor $n = p^{p^k - 1}$ tau-szám, mert $\tau(n) = p^k \mid p^{p^k - 1}$. Másképp: Legyen p prím és $n = 36p = 2^2 \cdot 3^2 p$. Akkor $\tau(n) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18 \mid 36p$, tehát $n = 36p$ tau-szám.

2. ▼ Keressünk olyan n számokat, amelyekre $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3)$.

Megoldás. A MAPLE segítségével a 10000 alatti ilyen számok:

```
> with(numtheory):
> for n from 1 to 10000 do if tau(n)=tau(n+1) and
    tau(n)=tau(n+2) and tau(n)=tau(n+3) then print(n) fi od;
    242 3655 4503 5943 6853 7256 8392 9367
```

..... a témának nincs vége ... az előadásnak itt a vége.