

1. Komplex számok

Dr. TÓTH LÁSZLÓ egyetemi docens, Pécsi Tudományegyetem, 2007

1.1. A komplex számtest

1.1.1. Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. A szokásos összeadási és szorzási műveletekkel $\mathbb{R}$ egy kommutatív test, jelölés: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Az $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ halmazon definiáljuk a következő műveleteket:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

1.1.2. Tétel. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ kommutatív test és $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\phi(x) = (x, 0)$ egy injektív testmorfizmus.

Bizonyítás. Azonnali, hogy $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ Abel-csoport, mert a komponensenként vett összeadás asszociatív, kommutatív, a zéruselem a $(0, 0)$, és (x, y) ellentettje a $(-x, -y)$. Igazolni kell még, hogy a fenti szorzási művelet asszociatív, kommutatív, van egységelem – ez az $(1, 0)$ –, minden $(x, y) \neq (0, 0)$ -nak létezik inverze és a szorzás disztributív az összeadásra nézve. Továbbá a ϕ függvény művelettartó, azaz $\phi(x + x') = \phi(x) + \phi(x')$ és $\phi(xx') = \phi(x)\phi(x')$ minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén, és ϕ injektív. ▼ Végezzük el! □

1.1.3. Az előbbieket alapján azonosítsuk az $(x, 0)$ elempárt x -szel: $(x, 0) = x$ és legyen $i = (0, 1)$. Akkor $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, tehát $i^2 = -1$ és $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$ alapján $z = x + iy$ és ez a felírás egyértelmű.

Azt mondjuk, hogy $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ a **komplex számok teste**, $\boxed{z = x + iy}$ a z komplex szám **algebrai alakja**, i az **imaginárius (képzetes) egység**, $x = \operatorname{Re}(z)$ a z **valós része**, $y = \operatorname{Im}(z)$ a z **imaginárius része**. Gyakran a $z = x + yi$ írásmódot használjuk.

A $z = x + iy$ és $z' = x' + iy'$ komplex számokra tehát $z_1 = z_2$ akkor és csak akkor, ha $x = x'$ és $y = y'$. A z és z' összeadása és szorzása pedig így történik:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \quad zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Ha $\mathbb{R}^2$ -et azonosítjuk az xOy derékszögű koordinátarendszer pontjaival (a sík pontjaival), akkor a fentiek szerint $\mathbb{C}$ azonosítható xOy -nal úgy, hogy $Ox = \mathbb{R}$ a **valós tengely**, $Oy = i\mathbb{R}$ a **képzetes tengely** vagy **imaginárius tengely** és xOy a **komplex sík (Gauss-féle sík)**. A komplex számok és a komplex sík pontjai közötti $x + iy \mapsto (x, y)$ megfeleltetés egy bijekció. Mi több, ez izomorfizmus a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ és $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ kommutatív testek között.

Az $x + iy$ komplex számhoz egyértelműen hozzárendelhető az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor, ahol P a $P(x, y)$ pont. Így a komplex számok összeadása (kivonása) a megfelelő helyvektorok összeadásával (kivonásával) interpretálható és érvényes pl. a háromszög-szabály.

Az x valós számok $x = x + 0i$ alakú komplex számok és ezek a valós tengelyen vannak. A $z = 0 + iy = iy$ alakú komplex számokat **képzetes** (vagy tiszta képzetes) számoknak nevezzük, ezek a képzetes tengelyen helyezkednek el.

A $z = x + iy \in \mathbb{C}$ **abszolút értéke** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (z képe az origótól való távolsága), **konjugáltja** pedig a $\bar{z} = x - iy$ komplex szám. Itt $\bar{z}$ a z szimmetrikusa a valós tengelyre nézve, lásd 1. ábra.

A $z \in \mathbb{C}$ szám akkor és csak akkor valós, ha $z = \bar{z}$, és z akkor és csak akkor képzetes, ha $z = -\bar{z}$. ▼ Igazoljuk! További tulajdonságokat rögzít a következő Tétel.

1.1.4. Tétel. Ha $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

- (i) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $\bar{\bar{z}} = z$, $|z| = |\bar{z}|$,
- (ii) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- (iii) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$,
- (iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
- (v) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (háromszög-egyenlőtlenség),
- (vi) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$,
- (vii) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Bizonyítás. (i) Ha $z = x + iy$, akkor $\bar{z} = x - iy$ és $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

(v) A $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ jelöléssel

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \quad |z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2},$$

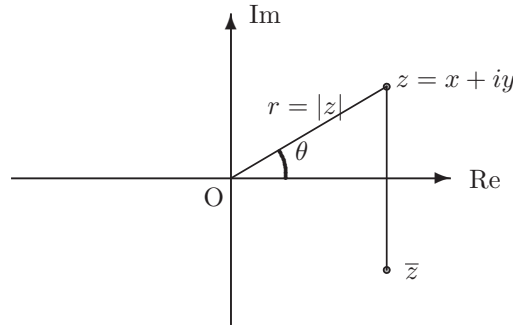
így azt kell igazolni, hogy

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

ami kétszeri négyzetreemeléssel elvégezhető. Megjegyezzük, hogy ilyen alakban ez a Minkowski-egyenlőtlenség speciális esete.

(vi) A (ii) tulajdonság alapján: $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$, ahonnan gyökvonással következik, hogy $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

▼ Bizonyítsuk be a többi tulajdonságot! □



1. ábra

1.1.5. Megjegyzések. Az 1.1.4. Tétel (iv) pontja azt mutatja, hogy $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ testizomorfizmus, azaz automorfizmus.

A háromszög-egyenlőtlenség így is igazolható:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2), \end{aligned}$$

mert $z_1 \bar{z}_2$ és $z_2 \bar{z}_1$ egymás konjugáltjai, hiszen $\overline{z_1 \bar{z}_2} = \bar{z}_1 z_2$. Használva, hogy $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$ következik, hogy

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

ahonnan $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

A háromszög-egyenlőtlenség érvényes több komplex számra is: ha $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, akkor

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

1.1.6. A z komplex szám egész kitevőre való hatványozását úgy definiáljuk, mint a valós számok esetén: $z^1 = z$, $z^{n+1} = z^n \cdot z$, ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $z^0 = 1$, ha $z \neq 0$. Ha $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, akkor $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, ahol $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

1.1.7. Legyen $z = x + iy \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jelölje r és θ az (x, y) pont polár-koordinátáit, ahol $r = |z| > 0$ és $\theta \in [0, 2\pi)$. Akkor $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ és kapjuk, hogy $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ez a z komplex szám **trigonometriai alakja**, θ pedig a z **(fő)argumentuma**, jelölés: $\theta = \arg z$, lásd 1. ábra. Itt $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$, ahonnan x és y ismeretében meghatározható θ .

A trigonometriai alakban θ helyett $\theta + 2k\pi$ is írható, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ jelölje $\arg_\alpha z$ azt a $\theta + 2k\pi$ értéket, amely az $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ intervallumba esik, alkalmas k választással. Megjegyezzük, hogy θ értékét néha célszerű a $[-\pi, \pi)$ intervallumból választani.

A $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ trigonometriai alakú komplex számok akkor és csak akkor egyenlőek, ha abszolút értékeik egyenlőek: $r_1 = r_2$ és argumentumaik egyenlőek modulo 2π : $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

1.1.8. Tétel. 1. Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tetszőleges komplex számok, amelyek trigonometriai alakja $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, akkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)),$$

tehát trigonometriai alakú komplex számokat úgy szorzunk, hogy az abszolút értékeiket szorozzuk, az argumentumaikat összeadjuk, és ilyen számokat úgy osztunk, hogy az abszolút értékeiket osztjuk, az argumentumaikat pedig kivonjuk.

2. Ha $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, akkor $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ minden $n \in \mathbb{Z}$ -re.

Bizonyítás. 1. ▼ Végezzük el, használva a $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$ és $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$ addíciós képleteket!

2. Az előzőekben legyen $r_1 = r_2 = r$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Következik, hogy $(r(\cos \theta + i \sin \theta))^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$. Alkalmazzunk n -szerinti indukciót, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Ezek után, ha $n > 0$, akkor

$$\begin{aligned} (r(\cos \theta + i \sin \theta))^{-n} &= \frac{1}{(r(\cos \theta + i \sin \theta))^n} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)} = \\ &= r^{-n}(\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)), \end{aligned}$$

használva a trigonometriai alakú komplex számok osztására vonatkozó szabályt, lásd 1. pont. $\square$

1.1.9. Következmény. (Moivre-képlet) Ha $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Bizonyítás. Az 1.1.8. Tétel 2. pontjának következménye. $\square$

1.1.10. A z komplex szám n -edik gyökei ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) a $w^n = z$ egyenlet $w \in \mathbb{C}$ megoldásait értjük. Legyen $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ és $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Akkor behelyettesítve:

$$\rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

ahonnan $\rho^n = r$, $n\varphi = \theta + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, azaz $\rho = \sqrt[n]{r}$ (az r valós n -edik gyöke) és $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Kapjuk, hogy :

$$\sqrt[n]{z} = z_k := \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

amely n különböző értéket ad (ha $k = n, n+1, \dots$, akkor ugyanezek ismétlődnek).

Egy z komplex szám n -edik gyökei az origó középpontú $\sqrt[n]{r}$ sugarú körön, egy szabályos n -szög csúcspontjaiban vannak.

Az n -edik **egységgyökök** a $z = 1$ n -edik gyökei és ezek:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Ha $\frac{m}{n}$ egy tetszőleges racionális szám, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, lnko $(m,n)=1$, akkor $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$, $z \in \mathbb{C}^*$, amely n számú (tehát véges sok) értéket jelent.

1.1.11. Ha $\theta \in \mathbb{R}$, vezessük be a következő jelölést: $\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$. Így ha $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ egy komplex szám, akkor $\boxed{z = r e^{i\theta}}$, amit z **exponenciális alakjának** nevezünk.

Jegyezzük meg, hogy $|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = 1$ minden $\theta \in \mathbb{R}$ -re.

Az 1.1.8. Tétel alapján kapjuk a következő összefüggést, amely hasonló, mint az $e^{x+y} = e^x e^y$, $x, y \in \mathbb{R}$, és amely indokolja, hogy a fenti jelölést használjuk.

1.1.12. Tétel. Ha $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, akkor

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}. \quad \square$$

1.1.13. A fentiek alapján, ha $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, akkor

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}.$$

Ha $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$, akkor ennek konjugáltja: $\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r e^{-i\theta}$.

Ha $z = x + iy$ egy komplex szám, akkor jelölje e^z a következő komplex számot:

$$\boxed{e^z = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)}.$$

Például, ha $z = 3 + 2i$, akkor $e^z = e^3 e^{2i} = e^3 (\cos 2 + i \sin 2)$.

1.1.14. Tétel. Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Bizonyítás. Legyen $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, akkor 1.1.12. alapján

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \quad \square$$

1.1.15. A komplex síkbeli egyenes egyenlete $z = at + b$, ahol $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ és $t \in \mathbb{R}$. Ez az egyenes átmegy az a ponton és párhuzamos a b vektorral.

A komplex síkbeli egyenes kör egyenlete $z = z_0 + Re^{it}$, ahol $z_0 \in \mathbb{C}$ a kör középpontja, $R \in \mathbb{R}$ a kör sugara és $0 \leq t < 2\pi$.

1.1.16. Feladatok.

1. ▼ Írjuk fel a következő komplex számok trigonometriaival és exponenciális alakját: $1 + i, 1 + i\sqrt{2}, -4, 5i, -1 - i, -1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} + i$.

2. ▼ Írjuk fel a következő komplex számok algebrai alakját: $2(\cos \pi/4 + \sin \pi/4), 3(\cos \pi/2 + \sin \pi/2), -4(\cos \pi/3 + \sin \pi/3), e^{2i\pi/3}, e^{2i\pi/3}, e^{-5i\pi/4}, e^{2i\pi}$.

3. ▼ Számítsuk ki: $\sqrt[4]{-i}, \sqrt[4]{16}, \sqrt[6]{1+i}, \sqrt[5]{-2\sqrt{3}+2i}$.

4. ▼ Ha $\theta \in \mathbb{R}$, mutassuk meg, hogy

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

5. ▼ Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$. Igazoljuk, hogy ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

a) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,

b) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$,

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$,

d) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ (paralelogramma-azonosság).