

17. A gráfok szemléletes bevezetése

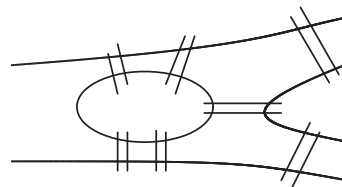
Tekintsük a következő feladatokat:

17.1. Feladat. Egy 21 tagú társaság bizonyos tagjai kézfogással üdvözölték egymást. Igazoljuk, hogy biztosan van olyan személy, aki páros számú emberrel fogott kezét.

17.2. Feladat. Igazoljuk, hogy ebben a 21 tagú társaságban van legalább két ember, akik ugyanannyiszor fogtak kezét.

17.3. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy 6 fős társaságnak mindig van 3 olyan tagja, akik ismerik egymást, vagy 3 olyan tagja, akik nem ismerik egymást (az ismerettségek kölcsönösek.)

17.4. Feladat. Königsberg városában (mai nevén Kalinyingrád) a Pregel folyón 7 híd vezetett keresztül a 11. ábra szerint. Végig lehetett-e sétálni minden hídon pontosan egyszer úgy, hogy a séta végére visszaérkezzünk a kiindulópontba?



11. ábra

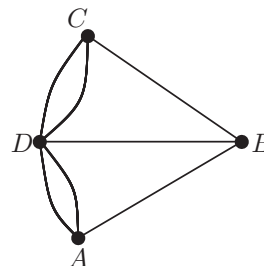
17.5. Feladat. Egy telken 3 ház és 3 kút van. Tervezhető-e 9 út úgy, hogy mindegyik háztól mindegyik kúthoz közvetlen út vezessen, és a 9 út ne keresztezze egymást (alagutak és felüljárók nem megengedettek)?

Ezek a feladatok, és ezeken kívül sok más, látszólag teljesen különböző jellegű probléma ugyanazzal a fontos kombinatorikai struktúrával írható le és vizsgálható. Ennek a neve: *gráfstruktúra* vagy *gráf*.

Ebben a szakaszban és a későbbiekben visszatérünk a 17.1-17.5. Feladatokra és bemutatjuk megoldásukat.

A 11. ábrán jelölje A, B és C a partokat, D a szigetet, a hidakat pedig jelöljük a pontokat összekötő vonalakkal. Így a következő sematikus ábrát kapjuk (12. ábra).

Az ilyen és ehhez hasonló alakzatokat **gráfoknak** nevezzük, itt A, B, C, D az adott **gráf csúcsai** (vagy pontjai, csúcspontjai, csomópontjai, szögpontjai), a csúcsokat összekötő vonalak a **gráf élei**. Megtörténhet, hogy a síkbeli ábrán az élek olyan pontban is metszik egymást, amely nem csúcsa a gráfnak.



12. ábra

A gráf csúcsait vastagított pontokkal jelezzük. Két csúcs között több él is lehet, ezeket **többszörös éleknek** nevezzük. Egy csúcs önmagával is össze lehet kötve, az ilyen él neve **hurokél**.

A 17.4. Feladaban megfogalmazott kérdést Königsberg lakói tették fel Eulernek, a kor híres matematikusának. A fenti kérdés így is megfogalmazható: le tudjuk-e rajzolni ezt a gráfot egy vonallal úgy, hogy közben a ceruzát nem emeljük fel és minden vonalat csak egyszer rajzolunk le?

Euler válaszként igazolta (általánosan vizsgálva a kérdést), hogy nem lehet végigmenni a hidakon, azaz nem tudjuk lerajzolni a gráfot a feltétel szerint. Ugyanis bármely pontból is indulunk ki, ha egy másik pontba beérkezzünk, onnan ki is kell menni. Lehet, hogy utunk során újra érintjük ezt a pontot, de akkor is két él bejárásával. Ezért szükséges, hogy minden pontból páros sok él induljon ki. Ez nem teljesül a fenti gráfra, mert minden ponthoz páratlan sok él tartozik.

Euler azt is megmutatta, hogy ez a feltétel (minden pontból páros sok él indul ki) nemcsak szükséges, hanem elégséges is a gráf ilyen bejárásához.

A gráfelmélet kialakulását 1736-tól számítjuk, attól a dolgozattól, amelyben Euler a königsbergi hidak problémáját megoldotta.

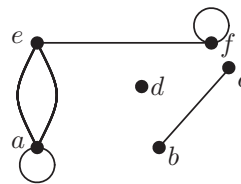
Egy gráf valamely pontjának **fokszáma** vagy foka az adott pontból kiinduló élek száma. Jelölés: $d(A)$ a A pont fokszáma. A 12. ábrán pl. $d(A) = d(B) = d(C) = 3$, $d(D) = 5$. Egy gráf **izolált pontja** egy olyan pont, amelyből nem indul ki egyetlen egy él sem. Az izolált pontok tehát a 0 fokszámú pontok, a 12. ábrán nincsenek ilyenek. A 13. ábrán látható gráfon d izolált pont, az a és f pontokban egy-egy hurokél van.

Jelölje $|E|$ egy adott gráf éleinek a számát.

17.6. Tétel. Tekintsünk egy tetszőleges n pontú gráfot, amelynek pontjai $P_1, P_2, \dots, P_n$.

i) A pontok fokszámainak összege egyenlő az élek számának a kétszeresével: $d(P_1) + d(P_2) + \dots + d(P_n) = 2|E|$.

ii) A páratlan fokszámú pontok száma páros.



13. ábra

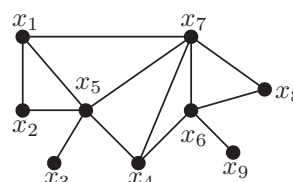
Bizonyítás. i) Vegyük sorra a pontokat és számoljuk össze a pontokhoz tartozó éleket. Ezek száma összesen a pontok fokszámainak összege, másrészt éppen az élek számának kétszerese.

ii) Azonnali i) alapján. $\square$

Vizsgáljuk a 17.1. Feladatot. Tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjait a társaság tagjai alkotják, az éleket pedig a kézfogások. Ez egy 21 pontú gráf. Alkalmazva az előző Tétel ii) pontját azt kapjuk, hogy páros azoknak a száma, akik páratlan sok emberrel fogtak kezét. De 21 páratlan szám, ezért biztosan van olyan személy, akire ez nem igaz, aki tehát páros sok emberrel fogott kezét.

A 17.1. Feladatban megfogalmazott állítás nemcsak egy 21 tagú társaságra, hanem egy n tagú társaságra is igaz, ahol $n > 1$ tetszőleges páratlan szám. Az is igaz, hogy ekkor páratlan azoknak a száma, akik páros számú emberrel fogtak kezét.

Egy olyan gráfot, amelyben nincsenek hurokélek és többszörös élek **egyszerű gráfnak** nevezzük, lásd pl. a 14. ábrát.

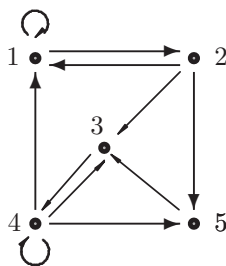


14. ábra

17.7. Tétel. Egy n pontú egyszerű gráfban mindig van két azonos fokszámú pont.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Akkor a pontok fokszámai mind különbözők. Egy pont legfeljebb $n - 1$ másik ponttal lehet összekötve, ezért a pontok fokszámai $0, 1, 2, \dots, n - 1$. De így van olyan pont, amely foka 0 (izolált pont) és van olyan pont is, amely foka $(n - 1)$, azaz olyan, amely minden más ponttal össze van kötve. Ez ellentmondás. $\square$

Térjünk rá a 17.2. Feladat megoldására. A megfelelő gráf egyszerű gráfnak tekinthető (feltéve, hogy két ember legfeljebb egyszer fog kezét és senki sem fog kezét saját magával) és alkalmazzuk a 17.7. Tételt. Az állítás egy n tagú társaságra is igaz, ahol $n \geq 2$ tetszőleges szám. Ha $n = 21$, akkor a 17.2. Feladatot kapjuk.



15. ábra

Sok más olyan probléma is van, amelyek gráfokkal modellezhetők, pl. úthálózatok, telefonhálózatok, elektromos áramkörök. Bizonyos problémákra irányított gráfokkal történik a modellezés, azaz olyan gráfokkal, amelyeknek élei irányítottak, lásd pl. a 15. ábrát. Sok esetben a gráfelméleti módszerek és eredmények alkalmazásai a felmerülő problémák megválaszolására.

Gráfnak tekinthető a világháló is, a World Wide Web, amelynek pontjai a weblapok, az élei pedig a weblapok közötti hiperlinkek. A Google és a hasonló keresők bonyolult gráfelméleti ötleteket és módszereket használnak, hogy ennek a gráfnak a pontjaira egy sorrendet állítsanak fel figyelembe véve a gráf globális jellemzőit.

18. Egyszerű gráfok

A továbbiakban egyszerű gráfokkal foglalkozunk, ezek matematikai definíciója a következő:

18.1. Definíció. Legyen V egy nemüres halmaz és legyen $V^{(2)} = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$ a V kételemű részhalmazainak halmaza. A $G = (V, E)$ rendszert, ahol $E \subseteq V^{(2)}$ **egyszerű gráfnak**, a továbbiakban röviden **gráfnak** nevezzük. Itt V elemei a **gráf pontjai** (vagy csúcsai, csúcspontjai), E elemei a **gráf élei**.

A G gráfra vonatkozóan jelölés: $V = V_G$, $E = E_G$, tehát $G = (V_G, E_G)$. További jelölés: $\{x, y\} = xy$, ahol $xy = yx$, és $x \in V_G$ helyett néha ezt írjuk: $x \in G$.

Ha $e = xy \in E_G$ a gráf egy éle, akkor azt mondjuk, hogy x és y az él **végpontjai**. Az u és v pontok **szomszédos pontok**, ha létezik egy $uv \in E_G$ él. Az $e_1, e_2 \in E_G$ **szomszédos élek**, ha van közös végpontjuk, azaz $e_1 = xy, e_2 = xz$ valamely $x, y, z \in V$ -re.

Megjegyzés: Angolul a gráf pontjai = [vertex, vertices], élek = [edge, edges], innen a V és E jelölések.

Itt és a továbbiakban egy A véges halmaz számosságát (elemeinek számát) így jelöljük: $|A|$ vagy $\#A$.

Ha V véges halmaz, akkor $|V_G|, |E_G|$ végesek és **véges gráfról** beszélünk, a továbbiakban ilyenekről lesz szó. A V_G halmaz $|V_G|$ számosságát, tehát a gráf pontjainak számát a gráf rendjének is nevezzük. Ha $|V_G| = n$, akkor azt mondjuk, hogy G egy n pontú gráf. Ha V végtelen halmaz, akkor G egy **végtelen gráf**.

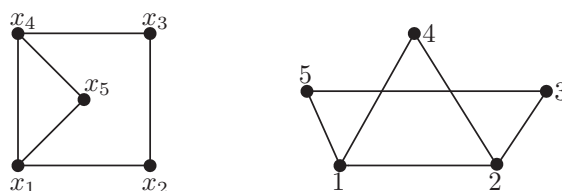
A gráfok ábrázolhatók a síkban. Pl. a 14. ábra annak a G gráfnak a képe, amelyre $V_G = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$, $E_G = \{x_1x_2, x_1x_5, x_1x_7, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_4x_6, x_4x_7, x_5x_7, x_6x_7, x_6x_8, x_6x_9, x_7x_8\}$, ez egy 9 pontú gráf, az élek száma 13.

Egy x pont **foka** (vagy fokszáma) az x -szel szomszédos pontok száma, jelölés: $d_G(x) = d(x)$, azaz $d_G(x) = \#\{y \in G : xy \in E_G\}$. Az x **izolált pont**, ha $d(x) = 0$.

A fokszámokra vonatkozó 17.6. és 17.7. Tételek igazak egyszerű gráfokra, a 17. szakaszban adott bizonyítások megfelelnek a 18.1. Definíciónak.

18.2. Definíció. Legyen G és H két gráf. Azt mondjuk, hogy ezek **izomorf gráfok**, jelölés $G \simeq H$, ha létezik egy olyan $\phi : G \rightarrow H$ bijektív függvény, amelyre $xy \in E_G \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E_H$ (minden $x, y \in E_G$ -re), azaz xy akkor és csak akkor éle G -nek, ha $\phi(x)\phi(y)$ éle H -nak.

Például a 16. ábrán levő gráfok izomorfak, itt egy izomorfizmus a következő: $x_1 \mapsto 2, x_2 \mapsto 3, x_3 \mapsto 5, x_4 \mapsto 1, x_5 \mapsto 4$.



16. ábra

18.3. Feladat. Mennyi az n pontú gráfok száma?

Megoldás. Annyi n pontú gráf van, ahányféleképpen a élek megválaszthatók. Az élek maximális száma $|V^{(2)}| = \binom{n}{2}$. Következik, hogy az n pontú gráfok száma a $V^{(2)}$ halmaz részhalmazainak a száma, azaz $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}$ ($n \geq 1$).

18.4. Feladat. Rajzoljuk le az n pontú gráfokat, ahol $n = 1, 2, 3$. Azonosítsuk az izomorf gráfokat.

A 7. Táblázat azt mutatja, hogy adott n -re az n pontú nemizomorf gráfok száma jóval kisebb az összes gráf számánál.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
gráfok száma	1	2	8	64	1 024	32 768	2 097 152	268 435 456
nemizomorf gráfok száma	1	2	4	11	34	156	1044	12 346

 7. Táblázat. Az n pontú gráfok száma

18.5. Feladat. Rajzoljuk le az $n = 4$ pontú nemizomorf gráfokat (ezek száma 11).

A pontok fokszámai nem határozzák meg a gráfot. Megtörténhet, hogy a $G = (V, E_G)$ és $H = (V, E_H)$ gráfokra $d_G(x) = d_H(x)$ minden $x \in V$ -re, de G és H nem izomorf gráfok.

18.6. Feladat. Adjunk példát ilyen G és H gráfokra.

További definíciók és jelölések:

18.7. Definíció. Legyen G egy gráf. Azt mondjuk, hogy

G **él nélküli gráf**, ha nincs egy éle sem,

G **teljes gráf**, ha $E_G = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$, azaz ha bármely két pont szomszédos (össze van kötve éllel). Az n pontú teljes gráf jelölése: K_n („komplett” gráf),

G **csillag**, ha úgy kapjuk, hogy egy pontját összekötjük az összes többivel,

G **út**, ha úgy kapjuk, hogy megállapítva a pontok egy sorrendjét az első pontot összekötjük a másodikkal, a másodikat a harmadikkal,..., az utolsó előttit az utolsóval,

G **kör**, ha egy útnak az első és utolsó pontját is összekötjük,

G **reguláris gráf**, ha minden pontja egyenlő fokszámú, ha ez a fokszám r , akkor G egy r -reguláris gráf.

A K_n teljes gráf egy $(n - 1)$ -reguláris gráf. A 17. ábrán a K_8 teljes gráf látható. A 3 pontú teljes gráfot **háromszögnek** is nevezzük.

A 18. ábrán a 10-edredű 3-reguláris gráf, az ún. Petersen-gráf szerepel.

18.8. Feladat. i) Hány éle van az n pontú csilagnak, útnak, körnek, illetve a K_n teljes gráfnak?

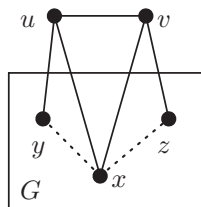
ii) Rajzoljuk meg a K_n teljes gráfokat, ahol $1 \leq n \leq 7$.

iii) Adjunk meg egy 2-reguláris gráfot és egy 4-reguláris gráfot.

iv) Létezik-e 3-reguláris 5 pontú gráf? És 7 pontú?

18.9. Tétel. Ha $n \geq 4$ páros szám, akkor létezik n pontú 3-reguláris gráf.

Bizonyítás. $n = 4$ -re a K_4 teljes gráf 3-reguláris. Legyen $n = 2k$. k -szerinti indukcióval tegyük fel, hogy G egy $2k - 2$ pontú 3-reguláris gráf. Legyen $xy, xz \in E_G$ a G két egy pontból kiinduló két éle. Vegyünk két újabb pontot, jelölje ezeket u, v és képezzük a H gráfot, amelyre $V_H = V_G \cup \{u, v\}$ és $E_H = (E_G \setminus \{xy, xz\}) \cup \{xu, xv, yu, zv, uv\}$. Következik, hogy H egy $2k$ pontú 3-reguláris gráf (lásd 19. ábra). $\square$



19. ábra

Egy adott gráfból részgráfot tehát úgy kapunk, hogy bizonyos pontokat és az ezekhez tartozó összes élt töröljük. A kiegészítő gráfot úgy kapjuk, hogy töröljük G meglévő éleit és megrajzoljuk az összes többi lehetséges élet (a pontokat nem változtatjuk).

18.11. Feladat. Adjuk meg a 14. és 18. ábrán levő gráfok egy-egy részgráfját és kiegészítő gráfjait.

18.12. Feladat. i) Igazoljuk, hogy ha G egy n pontú gráf, ahol $n \geq 6$, akkor létezik G -ben vagy $\bar{G}$ -ben háromszög.

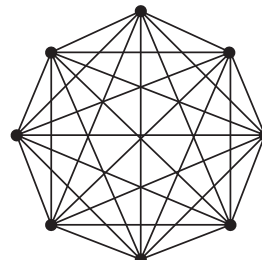
ii) Igaz-e ez a tulajdonság az 5 pontú gráfokra?

iii) Kapcsolat a 17.3. Feladattal?

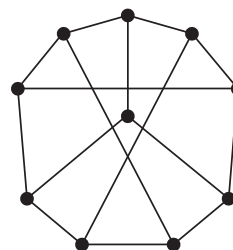
Megoldás. i) A G gráf éleit színezzük pirosra, a $\bar{G}$ komplementer gráf éleit pedig kékre. Legyen x egy tetszőleges pont, amelyből legalább 5 él húzható, mert $n \geq 6$. Következik, hogy ezek között biztosan van 3 azonos színű ab, ac, ad él, tehát vagy mind a három piros (G -beli élek) vagy mind a három kék ($\bar{G}$ -beli élek). Legyenek pl. ab, ac, ad piros élek. Ha bc vagy bd vagy cd piros él, akkor van egy piros háromszög (ha pl. bd piros, akkor abd piros háromszög). Ellenkező esetben bcd kék háromszög.

ii) Nem igaz. Keressünk ellenpéldát.

iii) $n = 6$ -ra éppen a 17.3. Feladat állítását kapjuk!



17. ábra. K_8 gráf



18. ábra. Petersen-gráf

18.10. Definíció. Legyen $G = (V_G, E_G)$ egy gráf. Azt mondjuk, hogy a G gráfnak H **részgráfja**, ha $V_H \subseteq V_G$ és $E_H \subseteq E_G$. Jelölés: $H \subseteq G$.

A H részgráf **kifeszíti** a G gráfot, ha G minden pontja H -ban van, azaz $V_H = V_G$. Ekkor a G gráfnak H egy **feszítő részgráfja**.

G **kiegészítő gráfja** (komplementer gráfja) a $\bar{G} = (V_G, V^{(2)} \setminus E_G)$ gráf.