

16. Stirling-számok

Először az ún. másodfajú Stirling-számokkal foglalkozunk.

Legyen A egy tetszőleges véges halmaz és legyenek $B_1, B_2, \dots, B_k \subseteq A$. Ha ezek a részhalmazok nem üresek, páronként diszjunktak és uniójuk az A halmaz, akkor azt mondjuk, hogy $B_1, B_2, \dots, B_k$ az A halmaz egy osztályfelbontását (más néven osztályozását vagy partícióját) alkotják. A B_i részhalmazokat osztályoknak vagy blokkoknak nevezzük. Az osztályfelbontások képzését az adott halmaz particionálásának is nevezzük.

Legyen A egy n -elemű halmaz ($n \geq 1$). Hány k részhalmazra való osztályfelbontása van A -nak? Ha pl. $k = 2$, akkor A -t két nemüres valódi részhalmazra kell bontanunk. Egy ilyen részhalmazt $(2^n - 2)$ -féleképpen lehet kiválasztani (az üres halmaz és az A nem jók), ekkor a másik részhalmaz meghatározott. De a két halmaz sorrendje lényegtelen, ezért a lehetőségek száma $2^n - 2$ fele, azaz $2^{n-1} - 1$.

Pl. $A = \{1, 2, 3\}$ két részhalmazra való partíciói: $\{1, 2\} \cup \{3\}$, $\{1, 3\} \cup \{2\}$, $\{2, 3\} \cup \{1\}$, ezek száma $3 = 2^{3-1} - 1$.

Az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ két részhalmazra való partíciói: $\{1\} \cup \{2, 3, 4\}$, $\{2\} \cup \{1, 3, 4\}$, $\{3\} \cup \{1, 2, 4\}$, $\{4\} \cup \{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\} \cup \{3, 4\}$, $\{1, 3\} \cup \{2, 4\}$, $\{1, 4\} \cup \{2, 3\}$, ezek száma $7 = 2^{4-1} - 1$.

16.1. Definíció. Legyenek $n \geq 1$, $k \geq 1$. Egy n -elemű halmaz k részhalmazra való osztályfelbontásainak számát **másodfajú Stirling-számnak** nevezzük, jelölés $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ vagy $S(n, k)$. Az összes partíciók száma a $B(n)$ -nel

jelölt **Bell-szám**, amelyre $B(n) = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

Megjegyezzük, hogy $B(n)$ nem más, mint egy n elemű halmazon definiálható ekvivalenciarelációk száma.

A definíció szerint azonnali, hogy ha $k > n$, akkor $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$. Továbbá $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ ($n \geq 1$), $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}$ ($n \geq 2$), $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$ ($n \geq 1$). Láttuk, hogy $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$ ($n \geq 2$).

Megállapodás szerint (*) $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ minden $n \geq 1$ -re és (**) $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$.

16.2. Tétel. Ha $1 \leq k \leq n$, akkor

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}.$$

Bizonyítás. Legyen $2 \leq k \leq n$. Tekintsük egy n -elemű halmaz k részhalmazra (k blokkra) való partícióit. Az $\{n\}$ vagy egy blokk vagy sem.

Ha $\{n\}$ egy blokk, akkor $n - 1$ elemet kell még $k - 1$ blokkra osztani és ez $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ -féleképpen lehetséges.

Ha $\{n\}$ nem blokk, akkor particionáljuk először az $\{1, 2, \dots, n-1\}$ halmazt k blokkra, ezt $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ -féleképpen lehet megtenni. Majd mind a k blokkhoz vegyük hozzá az n elemet, ez k -féleképpen lehetséges.

A partíciók száma tehát $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

Ha $k = 1$, akkor $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$. Innen $n \geq 2$ -re a fenti (*) konvenció szerint $1 = 1 + 0$, ami igaz, $n = 1$ -re pedig (**) szerint $1 = 0 + 1$, ami igaz (ezért célszerűek a (*) és (**) konvenciók). $\square$

A következő táblázat a másodfajú Stirling-számokat és a Bell-számokat tartalmazza:

n	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 4 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 5 \end{smallmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 6 \end{smallmatrix} \right\}$	$B(n)$
1	1						1
2	1	1					2
3	1	3	1				5
4	1	7	6	1			15
5	1	15	25	10	1		52
6	1	31	90	65	15	1	203

5. Táblázat. Másodfajú Stirling-számok és Bell-számok

Az előbbi rekurzív képlet szerint (amely hasonló a binomiális együtthatók addíciós képletéhez) itt minden $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ belső szám egyenlő a felette álló szám k -szorosának és az attól egy hellyel balra álló szám összegével. Ennek alapján a táblázat könnyen kiegészíthető újabb sorokkal.

16.3. Feladat. Adjuk meg az 5. Táblázat következő három sorát.

A Bell-számokra vonatkozik a következő rekurzió. Megjegyezzük, hogy a 16.1. Definíció és az előbbi (*) konvenció szerint $B(n) = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \dots + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ ($n \geq 1$). Ha $n = 1$, akkor innen $B(0) = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ (**) szerint, ezért legyen (***) $B(0) = 1$.

16.4. Tétel. Ha $n \geq 0$, akkor

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k) .$$

Bizonyítás. Nézzük az $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ halmaz összes partícióit aszerint, hogy az $n+1$ elem blokkja hány elemet tartalmaz.

Tegyük fel, hogy az $n+1$ blokkjában j számú elem van, ahol $1 \leq j \leq n+1$. Akkor a blokk többi $j-1$ számú elemét $\binom{n}{j-1}$ -féleképpen lehet megválasztani, és ha ez megtörtént, akkor a további $n+1-j$ számú elemet összesen $B(n+1-j)$ -féleképpen lehet partícionálni (ha itt $j = n+1$, akkor $n+1-j = 0$, ide kell, hogy $B(0) = 1$). Így

$$B(n+1) = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} B(n+1-j) = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{n-j+1} B(n+1-j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k) . \quad \square$$

A következő képletből az $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ másodfajú Stirling-számok közvetlenül is számíthatók.

16.5. Tétel. Ha $1 \leq k \leq n$, akkor

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} s_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n ,$$

ahol $s_{n,k}$ az $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ szürjektív függvények száma (lásd 9.5, n és k felcserélve).

Bizonyítás. Ha az $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ függvény szürjektív, akkor $f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(k)$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy olyan partícióját adják, amely k blokkot tartalmaz. Figyeljük meg, hogy a különböző szürjektív f függvények minden k blokkot tartalmazó partíciót $k!$ -szor adnak meg, mert az $f^{-1}(i)$ halmazokat permutálva a partíció nem változik, de f megváltozik. Következik, hogy a tekintett szürjektív függvények száma $s_{n,k} = k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, és lásd a 9.5. Feladat megoldásában adott képletet. $\square$

16.6. Feladat. Ha $n \geq 1$, akkor

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} [x]_k ,$$

ahol $[x]_k = x(x-1) \cdots (x-k+1)$.

Megoldás. 1. mód. Ellenőrzés: $n = 1$ -re $x = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} [x]_1 \Leftrightarrow x = x$ igaz, $n = 2$ -re $x^2 = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} [x]_1 + \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} [x]_2 \Leftrightarrow x^2 = x + x(x-1)$ igaz, $n = 3$ -ra $x^3 = \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} [x]_1 + \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} [x]_2 + \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} [x]_3 \Leftrightarrow x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$ igaz.

A 16.2. Tételbeli rekurzió alapján n szerinti indukcióval. Tegyük fel, hogy a képlet igaz $n-1$ -re és igazoljuk n -re, ahol $n \geq 2$.

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} [x]_k = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} [x]_n + \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} [x]_k + \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} [x]_k ,$$

ahol használva, hogy $[x]_k = [x]_{k-1}(x-k+1)$, a $j = k-1$ index-cserével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} [x]_n + \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} [x]_k &= \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} [x]_n + \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} [x]_{k-1}(x-k+1) = \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ j \end{smallmatrix} \right\} [x]_j(x-j) = \\ &= x \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ j \end{smallmatrix} \right\} [x]_j - \sum_{j=1}^{n-1} j \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ j \end{smallmatrix} \right\} [x]_j = x \cdot x^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} [x]_k , \end{aligned}$$

az indukciós feltétel szerint és visszahelyettesítve kész.

2. mód. A képlet két n -edfokú polinom egyenlősége. Ezt elegendő minden $x \in \mathbb{N}^*$ esetén igazolni, mert ha a két polinom minden $x \in \mathbb{N}^*$ -ra egyenlő, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ -re is egyenlő. Legyen tehát $x \in \mathbb{N}^*$.

Kombinatorikusan bizonyítunk: Legyen $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $B = \{1, 2, \dots, x\}$. Akkor x^n az $f : A \rightarrow B$ függvények száma. Ezeket csoportosítsuk $f(A)$ számossága szerint: ha $|f(A)| = k$, akkor az $f : A \rightarrow f(A)$ szürjektív függvények száma $s_{n,k} = k! \binom{n}{k}$, lásd 16.5. Tétel, és az $f(A)$ -ban levő k elem megválasztására $\binom{x}{k}$ lehetőség van. Tehát $|f(A)| = k$ esetén a függvények száma $k! \binom{n}{k} \binom{x}{k} = \binom{n}{k} [x]_k$, ahol $1 \leq k \leq n$, kész.

Térjünk át az ún. elsőfajú Stirling-számok vizsgálatára. Ezek n elem k ciklusba való rendezhetőségeinek számát adják meg (a másodfajú Stirling-számok n elem k nemüres részhalmazba való elrendezéseinek számát jelentik).

Tekintsük pl. a

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 9 & 4 & 1 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

9-edfokú permutációt (lásd 1.5.). Itt 1-nek megfelel 3, azaz $\sigma(1) = 3$, hasonlóan $\sigma(3) = 6$, $\sigma(6) = 1$, visszakapjuk az 1-et. Nem szerepelt a 2, amelyre $\sigma(2) = 2$, tovább, $\sigma(4) = 9$, $\sigma(9) = 5$, $\sigma(5) = 4$, visszaadja a 4-et. Nem volt még a 7: $\sigma(7) = 8$, $\sigma(8) = 7$. Tehát: $1 \mapsto 3 \mapsto 6 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 9 \mapsto 5 \mapsto 4$, $7 \mapsto 8 \mapsto 7$.

Így a következő ún. ciklusokat kapjuk: $(1\ 3\ 6)$, (2) , $(4\ 9\ 5)$, $(7\ 8)$. A ciklusokban minden elemnek a rákövetkező felel meg, az utolsónak pedig az első. Egy ciklust bármelyik elemével lehet kezdeni, pl. $(4\ 9\ 5) = (9\ 5\ 4) = (5\ 4\ 9)$. A σ permutációt így adjuk meg:

$$\sigma = (1\ 3\ 6)(2)(4\ 9\ 5)(7\ 8).$$

A ciklusok sorrendje megváltoztatható, σ írható pl. így is: $\sigma = (7\ 8)(1\ 3\ 6)(4\ 9\ 5)$, vagy $\sigma = (4\ 9\ 5)(7\ 8)(1\ 3\ 6)$, stb.

Hasonlóképpen, minden n -edfokú permutáció felbontható ciklusokra és a felbontás egyértelmű, eltekintve a ciklusok sorrendjétől és a ciklusok kezdőelemétől.

Valójában a σ permutáció felbontható ezeknek a diszjunkt ciklusoknak a szorzatára, ahol a ciklusokat is permutációknak tekintjük és a szorzás a permutációknak, mint függvényeknek a kompozícióját (összetételét) jelenti, de ezekre az algebrai fogalmakra és tulajdonságokra itt nincs szükségünk.

Azt mondjuk, hogy a σ n -edfokú **permutáció típusa** $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, ha σ felbontható k_1 számú 1 hosszúságú, k_2 számú 2 hosszúságú, ..., k_n számú n hosszúságú diszjunkt ciklusra, ahol $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Itt tehát k_i az i hosszúságú ciklusok száma.

A fenti példában adott σ 9-edfokú permutáció típusa $(1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, ahol $n = 9$, $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = \dots = k_9 = 0$ és $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$.

A $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 6-edfokú permutációra $1 \mapsto 5 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 6 \mapsto 1$, ezért egy ciklus van, $\tau = (1\ 5\ 4\ 3\ 2\ 6)$. Azt mondjuk, hogy ez egy ciklikus permutáció, és ennek típusa $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Az $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 6-edfokú identikus permutációra $e = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$, ennek típusa $(6, 0, 0, 0, 0, 0)$.

16.7. Tétel. (Cauchy) A $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ típusú n -edfokú permutációk száma

$$T(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n! 1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}}.$$

Bizonyítás. Egy $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ típusú σ permutációt írjunk a ciklusok hosszainak növekvő sorrendjében:

$$\sigma = \underbrace{(*) \dots (*)}_{k_1} \underbrace{(**) \dots (**)}_{k_2} \dots \underbrace{(* \dots *)}_{k_n},$$

ahol a csillagok az $1, 2, \dots, n$ számokat jelölik. Ezt úgy kapjuk, hogy az $1, 2, \dots, n$ számok közül kiválasztunk k_1 -et, amelyek a k_1 számú 1-hosszúságú ciklust alkotják, kiválasztunk $2k_2$ számot, amelyek a k_2 számú 2-hosszúságú ciklust alkotják, stb. Ez összesen $P_n = n!$ lehetőség (ha a zárójeleket töröljük, akkor az $1, 2, \dots, n$ elemek permutációit kapjuk). De a k_i számú i -hosszúságú ciklus egymás között felcserélhető, ezért osztani kell $k_i!$ -sal minden i -re. Továbbá, mind a k_i számú i -hosszúságú ciklust i -féleképpen írhatjuk, hiszen bármelyik elemmel kezdhethetjük, ezért osztani kell i^{k_i} -nel minden i -re. $\square$

16.8. Definíció. Legyen $1 \leq k \leq n$. Azoknak az n -edfokú permutációknak a számát, amelyek k ciklust tartalmaznak **elsőfajú Stirling-számnak** nevezzük, jelölés $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ vagy $s(n, k)$.

A definíció szerint azonnali, hogy $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right] = 1$ (az e identikus permutáció, amelyben minden elem a helyén marad). Továbbá $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = (n-1)!$, mert ha egy ciklus van, azaz ciklikus permutációról van szó, akkor a típus $(0, 0, \dots, 0, 1)$ és a Cauchy-tétel szerint $T(0, 0, \dots, 0, 1) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. Ugyanakkor $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] = \binom{n}{2}$, mert ha $n-1$ ciklus van, akkor a típus $(n-2, 1, 0, \dots, 0)$ és a Cauchy-tétel szerint $T(n-2, 1, 0, \dots, 0) = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2}$. Megállapodás szerint $(*) \left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 0$ minden $n \geq 1$ -re és $(**) \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 1$.

A definíció alapján azonnali, hogy $\sum_{k=1}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = n!$ ($n \geq 1$).

16.9. Tétel. Ha $1 \leq k \leq n$, akkor

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right].$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $2 \leq k \leq n$. Tekintsük a k ciklust tartalmazó n -edfokú permutációkat. Számoljuk meg ezeket aszerint, hogy n fixpont-e, azaz (n) ciklus-e vagy sem.

Ha (n) ciklus, akkor marad $n-1$ elem, amely $k-1$ ciklust alkot. Az ilyen permutációk száma $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]$.

Ha (n) nem ciklus, akkor n tagja egy legalább 2 hosszúságú ciklusnak. Legyen σ egy k ciklusú $(n-1)$ -edfokú permutáció. Az n -et beírhatjuk bármely a szám után a σ ciklusokra való felbontásában, és így egy n -edfokú permutációt kapunk, amelyben n nem fixpont. Itt $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]$ lehetőség van σ megválasztására és $(n-1)$ lehetőség van az a szám megválasztására. Az ilyen permutációk száma tehát $(n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

A k ciklust tartalmazó n -edfokú permutációk száma tehát $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

Ha most $k=1$, akkor $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$. Innen $n \geq 2$ -re a fenti $(*)$ megállapodás szerint $1 = 1 + 0$, ami igaz, $n=1$ -re pedig $(**)$ szerint $1 = 0 + 1$, igaz (ezért célszerűek a $(*)$ és $(**)$ konvenciók). $\square$

A 6. Táblázat az elsőfajú Stirling-számokat tartalmazza. A rekurzív képlet szerint itt minden $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ belső szám egyenlő a felette álló szám $(n-1)$ -szeresének és az attól egy hellyel balra álló szám összegével.

n	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 6 \end{smallmatrix} \right]$
1	1					
2	1	1				
3	2	3	1			
4	6	11	6	1		
5	24	50	35	10	1	
6	120	274	225	85	15	1

6. Táblázat. Elsőfajú Stirling-számok

16.10. Feladat. Adjuk meg a 6. Táblázat következő három sorát.

16.11. Feladat. i) Adjuk meg azokat a harmadfokú permutációkat, amelyek $k=1$, illetve $k=2$ ciklust tartalmaznak.

ii) Adjuk meg azokat a negyedfokú permutációkat, amelyek $k=2$, illetve $k=3$ ciklust tartalmaznak.

Megoldás. i) Ezek száma $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 2$, ill. $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 3$. A permutációk pedig $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$, ill. $(1)(2\ 3)$, $(2)(1\ 3)$, $(3)(1\ 2)$.

ii) Ezek száma $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 11$, ill. $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = 6$. A permutációk pedig $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 3)$, $(1)(2\ 3\ 4)$, $(1)(2\ 4\ 3)$, $(2)(1\ 3\ 4)$, $(2)(1\ 4\ 3)$, $(3)(1\ 2\ 4)$, $(3)(1\ 4\ 2)$, $(4)(1\ 2\ 3)$, $(4)(1\ 3\ 2)$, ill. $(1)(2)(3\ 4)$, $(1)(3)(2\ 4)$, $(1)(4)(2\ 3)$, $(2)(3)(1\ 4)$, $(2)(4)(1\ 3)$, $(3)(4)(1\ 2)$.

Az $[x]_n = x(x-1) \cdots (x-n+1)$ polinom együtthatói az elsőfajú Stirling-számok segítségével adhatók meg a következőképpen:

16.12. Tétel. Ha $n \geq 1$, akkor

$$[x]_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k.$$

Bizonyítás. Ellenőrzés: $n = 1$ -re $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \Leftrightarrow x = x$ igaz, $n = 2$ -re $[x]_2 = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 \Leftrightarrow x(x-1) = -x + x^2$ igaz, $n = 3$ -ra $[x]_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) = 2x - 3x^2 + x^3$ igaz.

A 16.9. Tételbeli rekurzió alapján n szerinti indukcióval. Tegyük fel, hogy a képlet igaz $n-1$ -re és igazoljuk n -re, ahol $n \geq 2$.

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^n + (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k,$$

ahol $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} = 1$, így

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^n + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=2}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k = x \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} x^j.$$

Következik, hogy

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = (x-n+1) \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} x^j = (x-n+1)[x]_{n-1} = [x]_n,$$

az indukciós feltétel szerint. $\square$

Az itt fellépő $(-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ számokat szokás **elsőfajú algebrai Stirling-számok**nak nevezni, a $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ számokat pedig **elsőfajú abszolút Stirling-számok**nak. Más szerzők az előbbieket nevezik elsőfajú Stirling-számoknak.

16.13. Feladat. Ha $n \geq 1$, akkor

$$[x]^n = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k,$$

ahol $[x]^n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

Megoldás. Azonnal következik x helyett $(-x)$ -et írva a 16.12. Tételbeli képletbe.

16.14. Feladat. Jelölje $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ az ún. **harmonikus számok**at, ahol $n \geq 1$. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$ -re $H_n = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} / n!$.

Megoldás. Ellenőrzés: $n = 1$ -re $H_1 = 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ igaz, $n = 2$ -re $H_2 = 3/2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} / 2$ igaz, $n = 3$ -ra $H_3 = 11/6 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} / 6$ igaz. Tegyük fel, hogy a képlet igaz $n-1$ -re és igazoljuk n -re, ahol $n \geq 2$. Írható, hogy

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n} = \frac{\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}}{(n-1)!} + \frac{1}{n} = \frac{n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + (n-1)!}{n!} = \frac{n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}}{n!} = \frac{\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}}{n!},$$

használva az elsőfajú Stirling-számokra vonatkozó rekurziót.

Megjegyzés. Igazolható, hogy ha $n \geq 2$, akkor H_n nem egész szám, és $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) = \gamma$, ahol $\gamma \approx 0,5772$ az ún. Euler-állandó.