

A Fibonacci-sorozat általános tagjára vontkozó képlet másképpen is levezethető. A 14.9. Feladatbeli eljárás alkalmas az $\boxed{x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}, n \geq 1}$ **másodrendű állandó együtthatós lineáris rekurziókkal** adott sorozatok n -edik tagjának a meghatározására is, ahol $x_0 = c$ és $x_1 = d$ adott értékek.

Ha $a = b = 1, c = 0, d = 1$ akkor visszakapjuk a Fibonacci-sorozatot. Ha $a = b = 1, c = 2, d = 1$, akkor a következő sorozatot kapjuk:

$(L_n)_{n \geq 0}, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, ahol $L_0 = 2, L_1 = 1$, ezt **Lucas-sorozatnak** nevezzük. Itt tehát $L_0 = 2, L_1 = 1, L_2 = 3, L_3 = 4, L_4 = 7, L_5 = 11, L_6 = 18, \dots$.

14.9. Feladat. Tekintsük az $(x_n)_{n \geq 0}$ sorozatot, amelyre $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}, n \geq 1$, és $x_0 = c, x_1 = d$, ahol a, b, c, d rögzített valós számok, $a^2 + 4b > 0$. Jelölje k_1 és k_2 a $k^2 - ak - b = 0$ egyenlet gyökeit, ahol a feltétel szerint $k_1 \neq k_2$ valósak.

i) Igazoljuk, hogy $x_{n+1} - k_1 x_n = (a - k_1)(x_n - k_1 x_{n-1}), x_{n+1} - k_2 x_n = (a - k_2)(x_n - k_2 x_{n-1})$, ahol $n \geq 1$.

ii) Igazoljuk, hogy $x_{n+1} - k_1 x_n = k_2^n (d - k_1 c), x_{n+1} - k_2 x_n = k_1^n (d - k_2 c)$, ahol $n \geq 0$.

iii) Mutassuk meg, hogy

$$x_n = \frac{k_1^n (d - k_2 c) - k_2^n (d - k_1 c)}{k_1 - k_2}, \quad n \geq 0.$$

iv) Vezessük le innen a Fibonacci-számokra vonatkozó Binet-képletet.

v) Adjunk képletet a Lucas-sorozat általános tagjára, L_n -re.

Megoldás. i) Közvetlen számolással. ii) Az i) pont ismételt alkalmazásával. iii) Vonjuk ki a ii) pontbeli egyenlőségeket.

iv) $L_n = \vartheta^n + \bar{\vartheta}^n, n \geq 0$, ahol $\vartheta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \bar{\vartheta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

14.10. Feladat. Igazoljuk, hogy

a) $F_n L_n = F_{2n} (n \geq 0)$,

b) $L_n = F_{n+1} + F_{n-1} (n \geq 1)$,

c) $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n (n \geq 1)$.

Megoldás. a) Az explicit képleteket használva, lásd az előző Feladatot, $F_n L_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vartheta^n - \bar{\vartheta}^n)(\vartheta^n + \bar{\vartheta}^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vartheta^{2n} - \bar{\vartheta}^{2n}) = F_{2n}$.

b), c) Teljes indukcióval.

15. Catalan-számok

15.1. Feladat. Adottak az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ változók (számok), ahol $n \geq 0$, és tekintsük ezek $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ szorzatát. Hányféleképpen zárójelezhető ez a szorzat?

Jelöljük C_n -nel ezt a számot. Ha $n = 2$, akkor két lehetőség van: $(a_0 \cdot a_1) \cdot a_2$ és $a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2)$, tehát $C_2 = 2$. Ha $n = 3$, akkor a lehetőségek: $((a_0 \cdot a_1) \cdot a_2) \cdot a_3, (a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \cdot a_3, a_0 \cdot ((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3), a_0 \cdot (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)), (a_0 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_3)$, ezek száma $C_3 = 5$. Továbbá $C_1 = 1$ (két tényező), $C_0 = 1$ (ekkor egy tényező van).

Mi lesz C_n ? A továbbiakban a generátorfüggvény módszerrel igazoljuk, hogy $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ minden $n \geq 0$ -ra. Ezeket a számokat, amelyek számos kombinatorikai problémában fellépnek, **Catalan-számoknak** nevezzük. A Catalan-számok sorozata $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, C_7 = 429, C_8 = 1430, \dots$. Jelölje $C(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$ a C_n számok generátorfüggvényét.

15.2. Tétel. 1) Ha $n \geq 1$, akkor $\boxed{C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0}$.

$$2) \quad \boxed{C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}}}.$$

Bizonyítás. 1) Legyen $n \geq 1$ tetszőleges és tekintsük $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ valamely zárójelezését. Figyeljük meg, hogy pontosan egy olyan szorzásjel van, amely minden zárójelen kívül esik. Ha ez a szorzásjel az a_k és a_{k+1} közé esik, akkor az előtte levő $a_0, a_1, \dots, a_k$ változók C_k -féleképpen zárójelezhetők, az utána levő $n - k$ változó pedig C_{n-k-1} -féleképpen, így a lehetőségek száma rögzített k -ra $C_k C_{n-k-1}$, összesen pedig $\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$.

2) Az 1) pontbeli képlet alapján

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \right) x^n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \sum_{n=k+1}^{\infty} C_{n-k-1} x^{n-k} =$$

$$= 1 + x \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \sum_{n=k+1}^{\infty} C_{n-(k+1)} x^{n-(k+1)},$$

ahol $\sum_{n=k+1}^{\infty} C_{n-(k+1)} x^{n-(k+1)} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots = C(x)$, így kapjuk, hogy

$$C(x) = 1 + x C^2(x), \text{ és innen } C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4x}}.$$

Melyik a megfelelő előjel? Mivel $C(0) = C_0 = 1$ következik, hogy $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}}$ a helyes képlet. $\square$

Az 1) pontbeli rekurzív képletből (amelynek jobb oldala egy konvolúciós összeg) meghatározhatók az egymást követő C_n számok.

15.3. Tétel. Minden $n \geq 0$ számra $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Bizonyítás. Használjuk az általánosított binomiális képletet, lásd 7. szakasz, ahonnan $\lambda = 1/2$ -re $\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k$ és a 15.2. Tétel szerint

$$C(x) = \frac{1}{2x} \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k \right) = -\frac{1}{2x} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4)^k x^k = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4)^k x^{k-1},$$

és a $k-1 = n$ helyettesítéssel

$$C(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n+1} (-4)^n x^n.$$

Adjuk meg most $\binom{1/2}{n+1}$ értékét:

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{5}{2} \right) \dots \left(-\frac{2n-1}{2} \right) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(n+1)! 2^{n+1}} = \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{n+1} (n+1)! \cdot 2 \cdot 4 \dots (2n)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n+1)! n!} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1} (n+1)} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Belyettesítve következik, hogy

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n,$$

ahonnan kapjuk a C_n -re vonatkozó képletet. $\square$

Ismertetünk további néhány olyan kombinatorikai feladatot, amelyekben a Catalan-számok lépnek fel.

15.4. Feladat. (Euler) Hányféleképpen lehet egy n oldalú konvex sokszöget háromszögekre bontani olyan átlókkal, amelyek a sokszög belsejében nem metszik egymást?

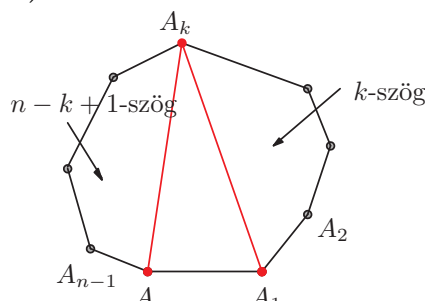
Megoldás. Jelöljük a keresett számot E_n -nel. Itt $E_2 = 1$ (megállapodás szerint), $E_3 = 1$, $E_4 = 2$, $E_5 = 5$. Tekintsük az $A_1 A_2 \dots A_n$ sokszög egy háromszögekre bontását. Legyen az $A_1 A_n$ oldalú háromszög harmadik csúcsa A_k (6. ábra). Az $A_1 A_k$ és $A_k A_n$ átlók az n -szöget az $A_1 A_2 \dots A_k$ k -szögre, az $A_1 A_k A_n$ háromszögre és az $A_k A_{k+1} \dots A_n$ $(n-k+1)$ -szögre bontják. Mivel a k -szöget E_k -féleképpen, az $(n-k+1)$ szöget E_{n-k+1} -féleképpen bonthatjuk fel háromszögekre ezért az $A_1 A_k A_n$ háromszöget tartalmazó háromszögekre bontások száma $E_k E_{n-k+1}$, ahol $2 \leq k \leq n-1$. Összegezve: $E_n = \sum_{k=2}^{n-1} E_k E_{n-k+1}$, ahol $n \geq 3$.

Ha n helyett $(n+2)$ -öt írunk (a feladatban n oldalú sokszög helyett $n+2$ oldalú sokszöget tekintünk), akkor kapjuk, hogy $E_{n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} E_k E_{n-k+3}$, innen az $E'_n = E_{n+2}$ jelöléssel $E'_n = \sum_{k=2}^{n+1} E'_{k-2} E'_{n-k+1}$,

$E'_n = \sum_{j=0}^{n-1} E'_j E'_{n-j-1}$, ami ugyanaz, mint a 15.2. Tételben szereplő rekurzió. Mivel a kezdeti értékekre $E'_1 = 1 =$

C_1 , következik, hogy $E'_n = C_n$ minden $n \geq 1$ -re.

Tehát $E_n = C_{n-2} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$, $n \geq 3$.

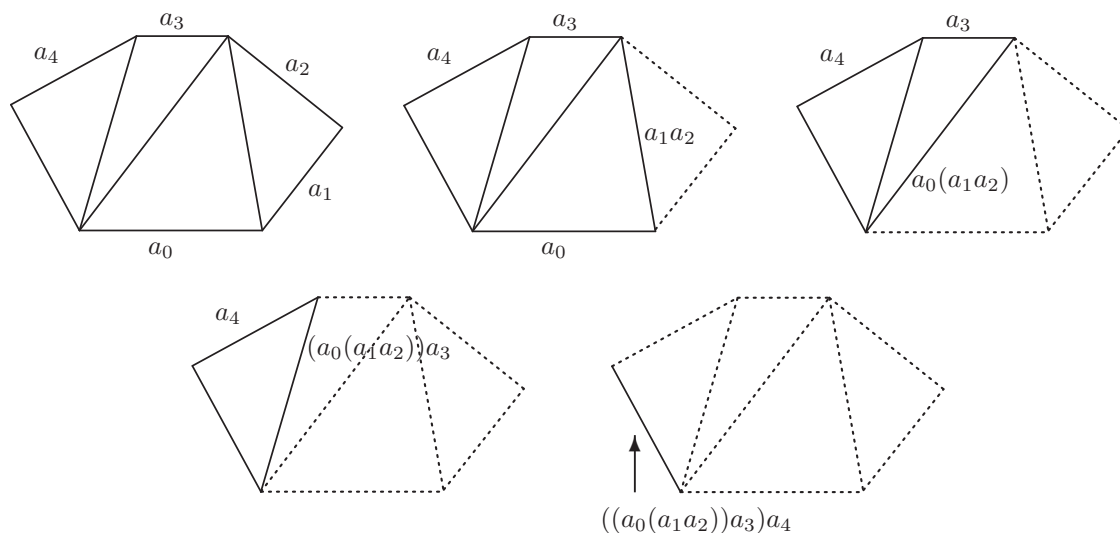


6. ábra

Közvetlenül is beláthatjuk, hogy minden n -re bijektív megfeleltetés van egy $(n+2)$ -oldalú konvex sokszög háromszögekre bontásai és az $a_0 \cdot a_1 \cdots a_n$ szorzat zárójelezései között, ahonnan következik, hogy $E_{n+2} = C_n$. Valóban, ha adott egy $(n+2)$ -oldalú konvex sokszögnek egy háromszögekre bontása, akkor kövessük az alábbi eljárást:

- írjuk fel a sokszög oldalaira egymásután az $a_0, a_1, \dots, a_n$ változókat,
- keressünk egy olyan háromszöget, amelynek két oldala a sokszög szomszédos megjelölt oldalai (biztosan van ilyen háromszög),
- töröljük le az ábráról ezt a két oldalt, és a két oldalon levő változók szorzatát írjuk fel a háromszög harmadik oldalára (az eredeti sokszög egy átlójára),
- a kapott sokszögre ismétljük meg a b), c), d) lépéseket.

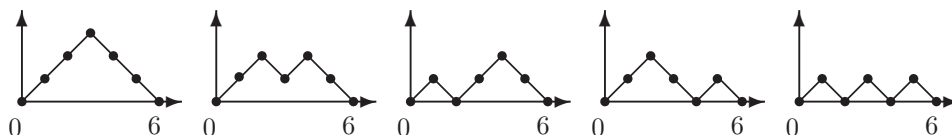
Így a $a_0 \cdot a_1 \cdots a_n$ szorzat egy zárójelezését kapjuk, lásd az 7. ábrát az $n=4$ esetre. Belátható, hogy különböző háromszögekre bontásokhoz különböző zárójelezések tartoznak, és minden zárójelezést megkapunk.



7. ábra

15.5. Feladat. Hányféleképpen juthatunk el a koordináta-rendszerben a $(0,0)$ pontból a $(2n,0)$ pontba úgy, hogy lépéseink az $f = (1,1)$ és $\ell = (1,-1)$ vektorok lehetnek és ne menjünk a vízszintes tengely alá? ($f =$ átlósan fel egyet, $\ell =$ átlósan le egyet a rácpontok között.)

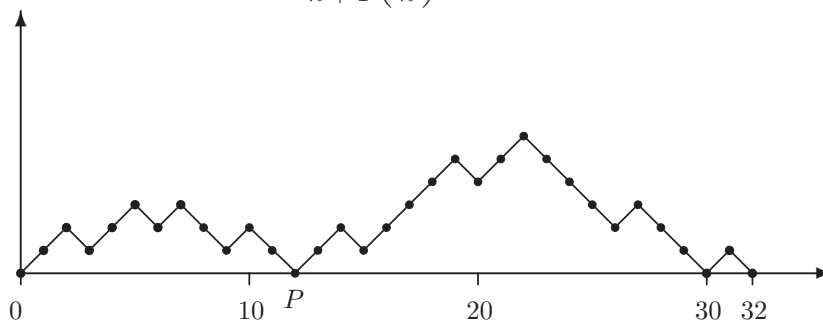
Megoldás. Legyen y_n a lehetőségek száma. Megállapítható, hogy $y_0 = 1 = C_0$, $y_1 = 1 = C_1$, $y_2 = 2 = C_2$, $y_3 = 5 = C_3$, lásd 8. ábra, ezeket Dyck-utaknak nevezzük. Legyen $n \geq 1$ rögzített és tekintsünk egy tetszőleges utat. Legyen $P(2i,0)$ az a pont, ahol ez az út először jut vissza a vízszintes tengelyre. Így az út két részre bomlik, az első a $(0,0)$ és $P(2i,0)$ pontok közötti, a második a $P(2i,0)$ és $(2n,0)$ közötti, ez utóbbi a $[2i, 2n]$


 8. ábra: Dyck-utak $n = 3$ -ra

intervallumon, amelynek hossza $2(n-i)$. Az első rész első lépése $f = \text{fel}$, utolsó lépése $\ell = \text{le}$, így ez y_{i-1} -féleképpen választható meg, a második rész pedig y_{n-i} -féleképpen, lásd a 9. ábrát $n = 16$ esetén, ahol $P(2i, 0) = P(12, 0)$. Tehát rögzített i -re ($1 \leq n$) az utak száma $y_{i-1}y_{n-i}$, összesen pedig

$$y_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1}y_{n-i} = y_0y_{n-1} + y_1y_{n-2} + \dots + y_{n-1}y_0,$$

ami ismét a korábbi rekurzió. Így $y_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ minden n -re.



9. ábra

15.6. Feladat. Hány olyan $2n$ -tagú $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ sorozat van, ahol a tagok mindegyike $+1$ vagy -1 , $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = 0$, és az $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}$ parciális összegek mindegyike ≥ 0 ?

Megoldás. Ez ugyanaz a probléma, mint a 15.5. Feladatbeli. Az $f = \text{fel}$ lépést jelölje $+1$, az $\ell = \text{le}$ lépést jelölje -1 , ahol az $n-1$ db. $+1$ -et és az $n-1$ db. -1 -et egymás mellé írva összegük 0 lesz. Az, hogy az út nem megy a vízszintes tengely alá éppen azzal ekvivalens, hogy a parciális összegek mind ≥ 0 értékűek.

Válasz: $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

15.7. Feladat. Hányféleképpen juthatunk el az $n \times n$ -es sakktáblán a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba úgy, hogy egyszerre egyet léphetünk felfelé vagy jobbra és nem léphetünk a (bal alsó sarkot a jobb felső sarokkal összekötő) mellékátló fölé?

Megoldás. Legyen a_n és b_n az összes lehetséges utak száma, ill. a mellékátló alatt maradó utak száma. Itt $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 20, \dots$ és $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 5, \dots$.

Jelölje A és B a bal alsó sarkot, ill. a jobb felső sarkot. Az A -t B -vel összekötő utak (törött vonalak) száma $a_n = \binom{2n-2}{n-1}$, mert $2n-2$ lépésre van szükség, ebből $n-1$ lépés felfelé és $n-1$ lépés jobbra. Azt kell megadni pl., hogy mikor lépünk jobbra. A $2n-2$ lépésből kell tehát kiválasztani $(n-1)$ -et, a sorrend nem számít.

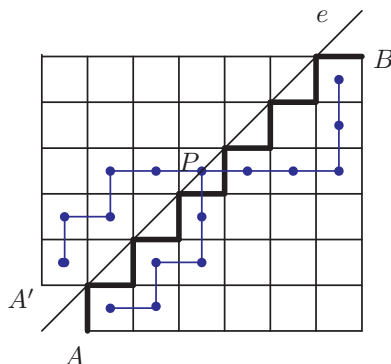
Ezek közül hány olyan $A-B$ út van, amely a mellékátló alatt marad? Nevezzük ezeket „jó” utaknak. Tekintsük a nem ilyen, a „rossz” utakat. Minden rossz út a mellékátló fölé kerül, tehát metszi a 10. ábrán látható e egyenest. Jelölje P azt a pontot, ahol egy rossz út először metszi az e egyenest. A rossz út így az $A-P$ és $P-B$ részekből áll. Az $A-P$ törött vonalat tükrözzük az e egyenesre, legyen a tükörkép az $A'-P$ törött vonal. Az $A'-P$ együtt a $P-B$ -vel (ez utóbbi változatlanul) egy $A'-B$ út.

Belátható, hogy így bijektív megfeleltetést létesítettünk az $A-B$ rossz utak és az $A'-B$ (összes lehetséges) utak között. Itt A' -ből B -be úgy juthatunk, hogy a $2n-2$ lépésből megadjuk azt az n -et, amikor jobbra lépünk. Ezek száma $\binom{2n-2}{n}$, hasonlóan, mint a megoldás elején.

A jó utak száma így $b_n = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}$. Ez egy közvetlen bizonyítás, itt nem hivatkoztunk a Catalan-számok előzetesen levezett tulajdonságaira.

Innen következik a 15.6. Feladat megoldása is. Valóban, n helyett $n+1$ -et írva tekintsük az $(n+1) \times (n+1)$ -es sakktáblát. A jobbra lépést jelölje $+1$, a felfelé történő lépést -1 . Itt az n db. $+1$ és az n db. -1 -et egymás

mellé írva összegük 0 lesz. Az, hogy az út a mellékátló alatt marad éppen azzal ekvivalens, hogy a parciális összegek mind ≥ 0 értékűek. Tehát a 15.6. Feladatra a válasz: $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.



10. ábra

Megmutatjuk, hogy az eredeti 15.1. Feladatra is adható a generátorfüggvény módszert nem használó, elemi megoldás úgy, hogy visszavezetjük a most közvetlenül megoldott 15.6. Feladatra. Bijektív megfeleltetés van az $a_0 \cdot a_1 \cdots a_n$ szorzat zárójelezett alakjai és a 15.6. Feladat feltételeinek eleget tevő $2n$ -tagú $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ sorozatok között.

Valóban, tekintsük az $a_0 \cdot a_1 \cdots a_n$ szorzat egy tetszőleges zárójelezett alakját.

1. lépés: tegyünk ki még egy pár zárójelet az elejére és a végére,
2. lépés: a szorzásjelek helyett írjunk $+1$ -et,
3. lépés: a jobb oldali zárójelek helyett írjunk -1 -et,
4. lépés: a bal oldali zárójeleket és az $a_0, a_1, \dots, a_n$ változókat töröljük le.

Ekkor a kapott $+1$ és -1 számokból álló sorozat teljesíti a 15.6. Feladat feltételeit. Különböző zárójelezésekhez különböző sorozatok tartoznak és minden sorozatot megkapunk. Pl. $n = 3$ -ra

$(a_0 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_3)$ -ből kiindulva $((a_0 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_3))$ és $+1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1$ adódik,

$a_0 \cdot (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3))$ -ből kiindulva $(a_0 \cdot (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)))$ és $+1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1$ adódik.

15.8. Feladat. Igazoljuk, hogy teljesül az $(n+2)C_{n+1} = (4n+2)C_n$ ($n \geq 0$) rekurzió.

15.9. Feladat. Egy kör alakú asztal körül $2n$ személy áll. Hányféleképpen alkothatnak ezek n párt úgy, hogy az egy párban levők kezét foghassanak anélkül, hogy egy másik pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk? (Az asztal felett átnyúlhatnak, és különbözőknek tekintjük az elforgatásokból származó elrendezéseket).