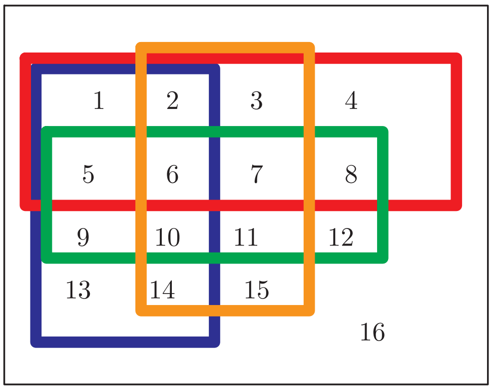
A 12.5. Feladat megoldása. Hány részre osztja a síkot n általános helyzetű kör?
Jelölje K_n a keresett számot, ahol $K_1 = 2$, $K_2 = 4$, $K_3 = 8$.

Tekintsünk n kört és még egy $(n+1)$-edik kört. Az $(n+1)$-edik kör az az első n kör mindegyikét két pontban metszi, így ezek a metszéspontok az $(n+1)$-edik kört $2n$ részre (körívre) osztják. Minden ilyen körív minden síktartományt kettévág, ezért

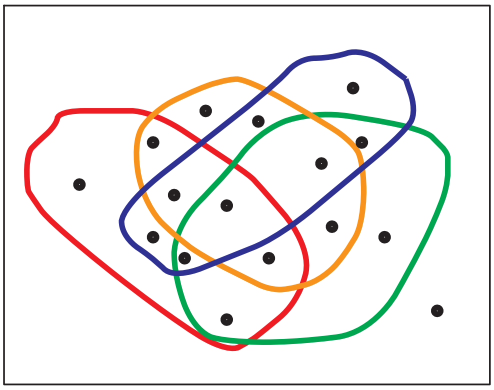
$$\boxed{K_{n+1} = K_n + 2n, \quad n \geq 2.}$$

Felírva ezt $n = 2, 3, .., n-1$-re és összeadva kapjuk, hogy $K_n = 2+2(1+2+...+n-1) = 2+n(n-1) = n^2-n+2$. Így $K_4 = 14$, $K_5 = 22$, $K_6 = 32$, stb., és következik, hogy $K_n < 2^n$, ha $n \geq 4$.

Megjegyzés. Innen következik, hogy négy halmaz esetén Venn-diagramot nem lehet körlapokkal megrajzolni. Ugyanis négy halmaz esetén a síkot, illetve egy téglalapot, 16 részre kell osztani, mert egy elem az adott négy halmaz mindegyikéhez vagy hozzátartozik vagy sem, ez $\overline{V}_4^2 = 16$ lehetőség. Körök helyett más zárt görbékkel (pl. ellipszisekkel) vagy téglalapokkal megadható a Venn-diagram, lásd a 4. és 5. ábrát.



4. ábra



5. ábra

13. Egész számok partíciói

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy egy $n \geq 1$ egész szám hányféleképpen írható fel pozitív egészek összegeként, ill. k db pozitív egész összegeként, ahol k rögzített, úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a tagok sorrendjére.

Például: $1 = 1$, $\quad 2 = 2 = 1+1$, $\quad 3 = 3 = 2+1 = 1+1+1$,
$4 = 4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$,
$5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$.

13.1. Definíció. Az $n \geq 1$ **egész szám partíciójá**nak nevezünk minden $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$ előállítást, ahol $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k \geq 1$ egészek, jelölés: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$. Azt mondjuk, hogy ez egy k részre (tagra) való partíció. Legyen $p(n)$ az n szám összes partícióinak száma és $p_k(n)$ az n olyan partícióinak száma, amelyekben a tagok száma k.

A fentiek szerint $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$. Továbbá pl. $p_1(5) = 1$, $p_2(5) = 2$, $p_3(5) = 2$, $p_4(5) = 1$, $p_5(5) = 1$. Célszerű a (*) $p(0) = p_k(0) = 1$ megállapodás.

Azonnali, hogy minden n-re $p_1(n) = 1$ (ahol $n = n$), $p_n(n) = 1$ (ahol $n = 1+1+...+1$) és $p(n) = p_1(n) + p_2(n) + ... + p_n(n)$.

A 11.5. Feladat megoldásában láttuk, hogy ha tekintettel vagyunk a sorrendre is, akkor az $n = x_1 + x_2 + ... + x_k$, $x_1, ..., x_k \geq 1$ előállítások száma $\binom{n-1}{k-1}$. Következik, hogy $p_k(n) \geq \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}$. Nem létezik explicit képlet $p_k(n)$-re és $p(n)$-re.

A $p_k(n)$ függvényre vonatkozik a következő rekurzió:

13.2. Tétel. *Ha $n \geq k \geq 2$, akkor* $\boxed{p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)}$.

Bizonyítás. Legyen λ egy k részre való partíció. Vizsgáljuk $p_k(n)$-et aszerint, hogy az utolsó λ_k rész 1 vagy 1-nél nagyobb.

Ha $\lambda_k = 1$, akkor n-nek ugyanannyi partíciója van k részre, mint amennyi partíciója van $n-1$-nek $k-1$ részre. Ha $\lambda_k > 1$, akkor minden rész nagyobb, mint 1, így minden részből 1-et kivonva az $n-k$ egy k részre való partícióját kapjuk. $\square$

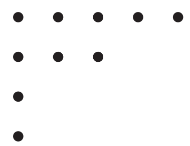
Ha $k = n$, akkor $p_n(n) = p_{n-1}(n-1) + p_n(0)$ adódik, azaz $1 = 1 + p_n(0)$, ami igaz (*) alapján.

A 4. Táblázat a $p(n)$ és $p_k(n)$ értékeket tartalmazza, ahol $k \le n \le 8$.

n	$p(n)$	$p_1(n)$	$p_2(n)$	$p_3(n)$	$p_4(n)$	$p_5(n)$	$p_6(n)$	$p_7(n)$	$p_8(n)$
1	1	1							
2	2	1	1						
3	3	1	1	1					
4	5	1	2	1	1				
5	7	1	2	2	1	1			
6	11	1	3	3	2	1	1		
7	15	1	3	4	3	2	1	1	
8	22	1	4	5	5	3	2	1	1

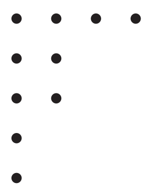
4. Táblázat. $p(n)$ **és** $p_k(n)$ **értékei**

A partíciók egy lehetséges reprezentálása az ún. **Ferrers-diagram**okkal történik. Pl. a $10 = 5 + 3 + 1 + 1$ partíciót úgy adjuk meg, hogy 5 pont kerül az első sorba, 3 pont a második sorba, 1 pont a harmadikba és 1 pont a negyedikbe, lásd a 6. ábrát:



6. ábra

Ennek a partíciónak a **konjugált**ja a $10 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1$, amelynek **Ferrers-diagram**ját úgy kapjuk, hogy az előbbi diagramot tükrözzük a főátlóra (az $y = -x$ egyenesre), lásd a 7. ábrát. Az $(5, 3, 1, 1)$ partíció konjugáltja tehát a $(4, 2, 2, 1, 1)$.



7. ábra

A diagramok segítségével belátható:

13.3. Tétel. *Az n szám olyan partícióinak száma, amelyekben k a legnagyobb rész, egyenlő az n szám k részre való partícióinak számával.* $\square$

14. Fibonacci-számok

A Fibonacci-számokat így definiáljuk: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$, ahol $n \ge 2$. A rekurziós képlet alapján F_2-től kezdve minden tag egyenlő az előző két tag összegével és kapjuk, hogy $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, ...

Ez a számsorozat a következő problémából származik, amely szerepel Fibonacci (Leonardo Pisano) „Liber Abaci” című 1202-ben írt munkájában:

„Hány pár nyúlra szaporodik egy év alatt a kezdeti pár, ha tudjuk, hogy a nyulak két hónap alatt válnak szaporodóképessé, és ezután minden nyúl-pár minden hónapban egy új párnak ad életet és mindegyikük életben marad?”

A feladat megoldásában a nyúl-párok számának időbeli alakulását kell követni. Az első hónapban 1 nyúl-pár van, és ugyanannyi lesz a másodikban is, a párok száma a harmadik hónapban változik 1-ről 2-re. A következő hónapban a szülők újabb párnak adnak életet, így a párok száma 3-ra nő. Az ötödik hónapban már az új pár is szaporodóképes, így az új párok száma kettővel nő, és az összes párok száma 5 lesz. A következő hónapban már mindkét ifjabb generáció hoz létre utódokat, és a párok száma hárommal növekedve 8-ra változik, stb.

Jelölje a_n a nyúlpárok számát az n-edik hónapban. Itt $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$, mert az n-edik hónapban annyi nyúlpár van, mint az előző, az $(n-1)$-edik hónapban (a_{n-1} „régi" nyúlpár), amihez hozzá kell adni az $(n-2)$-edik hónapban létező nyúlpárok számát, mert ezek egy-egy új párral szaporodtak (a_{n-2} „új" nyúlpár).

Tehát, a kezdeti értékeket is figyelembe véve, a nyúl-párok száma az n-edik hónapban éppen F_n.

14.1. Feladat. Hányféleképpen mehetünk fel egy n lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egyszerre csak egy vagy két lépcsőfokot léphetünk?

Megoldás. Legyen x_n a lehetőségek száma. Itt $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, mert pl. $n = 3$-ra ezek a lehetőségek: $1+1+1$, $1+2$ vagy $2+1$ lépcsőfok. Sejtés: $x_n = F_{n+1}$ minden $n \geq 1$-re.

Valóban, ha $n \geq 3$, akkor az utolsó lépés szerint két lehetőség van:

1. ha az utolsó lépés 1 lépcsőfok, akkor az $(n-1)$-edik fokra x_{n-1}-féleképpen léphetünk és 1 foknyi lépéssel felérünk az n-edik fokra,

2. ha az utolsó lépés 2 lépcsőfok, akkor az $(n-2)$-edik fokra x_{n-2}-féleképpen léphetünk és 2 foknyi lépéssel felérünk az n-edik fokra,

tehát $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ és innen indukcióval azonnali, hogy $x_n = F_{n+1}$ minden $n \geq 1$-re.

14.2. Feladat. Egy n emeletes ház emeleteit hányféleképpen festhetjük le zöld és sárga színekkel úgy, hogy ne legyen két szomszédos sárga emelet?

14.3. Feladat. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaznak, amelyek elemei között nincs két egymásutáni szám?

Megoldás. Jelölje x_n ezt a számot. Itt $x_1 = 2$ (mert jó az $\emptyset$ és az $\{1\}$), $x_2 = 3$ (jó: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, nem jó: $\{1, 2\}$), $x_3 = 5$ (jó: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$, nem jó: $\{1, 2\}$, $\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$).

Legyen $n \geq 3$ tetszőleges és tekintsük az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz olyan H részhalmazait, amelyek elemei között nincs két egymásutáni szám. Csoportosítsuk ezeket így:

I. Ha $n \in H$, akkor $n-1 \notin H$ és annyi H részhalmaz van, amennyi az x_{n-2} érték.

II. Ha $n \notin H$, akkor annyi H részhalmaz van, amennyi az x_{n-1} érték.

Ezért $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$, és kapjuk, hogy $x_n = F_{n+2}$, ahol $n \geq 1$.

A továbbiakban képletet adunk F_n-re. Legyen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + ...$$

az a hatványsor, amelynek együtthatói a Fibonacci-számok. Ezt a hatványsort a Fibonacci számsorozat **generátorfüggvény**ének nevezzük. Szorozva x-szel, majd x^2-tel kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + ... \\ xF(x) &= \qquad F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + F_4x^5 + ... \\ x^2F(x) &= \qquad\qquad F_0x^2 + F_1x^3 + F_2x^4 + F_3x^5 + ... \end{aligned}$$

Adjuk össze az utolsó két sort: $xF(x)+x^2F(x) = F_0x+(F_0+F_1)x^2+(F_1+F_2)x^3+(F_2+F_3)x^4+(F_3+F_4)x^5+ ... = F_0x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + ...$, amiből kivonva az első sort: $xF(x) + x^2F(x) - F(x) = F_1x = x$, tehát

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Bontsuk $F(x)$-et elemi törtek összegére. Itt az $1 - x - x^2 = 0$ egyenlet gyökei $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Jelölje: $\vartheta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\overline{\vartheta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ahol $\vartheta + \overline{\vartheta} = 1$, $\vartheta \cdot \overline{\vartheta} = -1$. Akkor $1 - x - x^2 = -(x - x_1)(x - x_2) = -(x + \vartheta)(x + \overline{\vartheta})$. Legyen $F(x) = \dfrac{A}{x+\vartheta} + \dfrac{B}{x+\overline{\vartheta}}$. Az A és B értékeket meghatározva kapjuk, hogy

$$F(x) = -\frac{\vartheta}{\sqrt{5}(x+\vartheta)} + \frac{\overline{\vartheta}}{\sqrt{5}(x+\overline{\vartheta})} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\vartheta x} - \frac{1}{1-\overline{\vartheta} x}\right),$$

ami közvetlenül is ellenőrizhető.

Most használjuk, hogy $1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \dfrac{1}{1-x}$, ahol $|x| < 1$ (geometriai sor). Innen $\dfrac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + ... + a^nx^n + ...$, amit alkalmazva $F(x)$ előbbi felírására kapjuk, hogy

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((1 + \vartheta x + \vartheta^2x^2 + ...) - (1 + \overline{\vartheta}x + \overline{\vartheta}^2x^2 + ...)\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((\vartheta - \overline{\vartheta})x + (\vartheta^2 - \overline{\vartheta}^2)x^2 + ...\Big),$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\vartheta^n - \overline{\vartheta}^n)x^n.$$

Azonosítva az $F(x)$ hatványsorában az együtthatókat következik, hogy $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\vartheta^n - \overline{\vartheta}^n)$, ahol $n \geq 0$. Összefoglalva az eddigieket:

14.4. Tétel. *i) A Fibonacci-számok generátorfüggvénye* $\boxed{F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}}$.

ii) (Binet-képlet) Az F_n Fibonacci-számokra $\boxed{F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\vartheta^n - \overline{\vartheta}^n),\ n \geq 0}$, *ahol* $\vartheta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033$, $\overline{\vartheta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618033$.

Megjegyezzük, hogy ϑ és $\overline{\vartheta}$ az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei. Ezek a számok kapcsolatosak az **aranymetszéssel**. Aranymetszést akkor végzünk, ha egy szakaszt úgy osztunk két részre, hogy a nagyobbik aránya az egész szakaszhoz egyenlő legyen a kisebbik résznek a nagyobbik részhez való arányával. Ha x és y jelöli ezeket a részeket, ahol $x > y$, akkor a feltétel: $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{y}{x} = a$. Innen $x^2 - xy - y^2 = 0$ és az $x/y = u$ jelöléssel $u^2 - u - 1 = 0$, $u_1 = \vartheta > 0$, $u_2 = \overline{\vartheta} < 0$, tehát $u = x/y = \vartheta$. Az a „tökéletes arány" értéke pedig $y/x = 1/\vartheta = -\overline{\vartheta} \approx 0,618033$ (ez számos képzőművészeti alkotás elemei között megfigyelhető).

Mivel $|\overline{\vartheta}| < 1$, következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\vartheta}^n = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{\vartheta^n/\sqrt{5}} = 1$, azaz $F_n \sim \vartheta^n/\sqrt{5}$, olvasd: F_n aszimptotikusan egyenlő $\vartheta^n/\sqrt{5}$-tel.

Tehát nagy n értékekre F_n közelítőleg $\vartheta^n/\sqrt{5}$. Sőt, ez már kis n-ekre is nagyon jó közelítést ad. Pl. $n = 10$-re $F_{10} = 55$, $\vartheta^{10}/\sqrt{5} = 55,003636$, $n = 20$-ra $F_{20} = 6765$, $\vartheta^{20}/\sqrt{5} \approx 6765,000029$, $n = 25$-re $F_{25} = 75025$, $\vartheta^{25}/\sqrt{5} = 75024,999997$.

Mi több, $|\overline{\vartheta}^n/\sqrt{5}| < 1/2$, ahol $n \geq 0$, így a Binet-képletből $|F_n - \vartheta^n/\sqrt{5}| < 1/2$, tehát F_n távolsága $\vartheta^n/\sqrt{5}$-től $1/2$-nél kisebb minden $n \geq 0$-ra. Következik, hogy $\boxed{F_n = \left[\dfrac{\vartheta^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right],\ n \geq 0}$, ahol $[x]$ az x szám egészrészét jelöli, ami egy újabb zárt alak F_n-re. Az is igaz, hogy ha n páros, akkor $F_n < \vartheta^n/\sqrt{5}$, ha pedig n páratlan, akkor $F_n > \vartheta^n/\sqrt{5}$.

14.5. Feladat. Igazoljuk, hogy
a) $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$ $(n \geq 1)$,
b) $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ $(n \geq 1)$,
c) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ ($n \geq 1$, Cassini-képlet),
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \vartheta$.

Megoldás. a) n-szerinti indukcióval, vagy így:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_0 \\ F_3 &= F_2 + F_1 \\ F_4 &= F_3 + F_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Összeadva ezeket az egyenlőségeket kapjuk, hogy $F_{n+2} = 1 + F_1 + F_2 + ... + F_n$, kész.

b) Ha $n=1$, akkor $1=F_1^2=F_1F_2=1\cdot 1$ igaz. Teljes indukcióval, tegyük fel, hogy a tulajdonság igaz n-re. Akkor $(n+1)$-re írható, hogy $F_1^2+F_2^2+...+F_n^2+F_{n+1}^2=F_nF_{n+1}+F_{n+1}^2=F_{n+1}(F_{n+1}+F_n)=F_{n+1}F_{n+2}$, kész.

c) Ha $n=1$, akkor $F_2F_0-F_1^2=-1$ igaz. Teljes indukcióval, tegyük fel, hogy a tulajdonság igaz n-re. Akkor $(n+1)$-re írható, hogy $F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(F_{n+1}+F_n)F_n-F_{n+1}^2=F_{n+1}F_n+F_n^2-F_{n+1}^2=F_n^2-F_{n+1}(F_{n+1}-F_n)=F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=-(-1)^n=(-1)^{n+1}$, kész.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}=\vartheta\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{\vartheta^{n+1}/\sqrt{5}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\vartheta^n/\sqrt{5}}{F_n}=\vartheta\cdot 1\cdot 1=\vartheta$.

14.6. Feladat. Igazoljuk, hogy
a) $F_1+F_3+...+F_{2n-1}=F_{2n}$ $(n\ge 1)$,
b) $F_2+F_4+...+F_{2n}=F_{2n+1}-1$ $(n\ge 1)$,
c) $F_1-F_2+F_3-...+(-1)^{n+1}F_n=(-1)^{n+1}F_{n-1}+1$ $(n\ge 1)$,
d) $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$ $(n,m\ge 1)$,

14.7. Feladat. Igazoljuk, hogy $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k=F_{2n}$, ahol $n\ge 0$.

Megoldás. Használva a Binet-képletet és a binomiális-tételt:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\vartheta^k-\overline{\vartheta}^k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\vartheta^k-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\overline{\vartheta}^k=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}((1+\vartheta)^n-(1+\overline{\vartheta})^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\vartheta^{2n}-\overline{\vartheta}^{2n})=F_{2n}.$$

A 14.4. Tételbeli Binet-képlet teljes indukcióval közvetlenül is igazolható, de ehhez szükséges, hogy azt előre megsejtsük (ami nehéz). A Fibonacci-sorozat generátorfüggvényét használó fenti módszer előnye az, hogy az F_n-re vonatkozó képlet úgy vezethető le, hogy azt (vagy annak alakját) előre nem sejtjük. A levezetésben elég, ha formális hatványsorokkal dolgozunk, a konvergencia vizsgálata nélkül.

Általánosan az $(a_n)_{n\ge 0}$ valós **számsorozat generátorfüggvénye** az $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ formális hatványsor, az $a_0,a_1,...,a_n$ **véges** valós **számsorozat generátorfüggvénye** az $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ polinom.

Pl. a binomiális együtthatók $\binom{n}{0},\binom{n}{1},...,\binom{n}{n}$ sorozatához tartozó generátorfüggvény a következő polinom:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+...+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n.$$

A formális hatványsorokra, illetve a polinomokra vonatkozó szokásos műveleti szabályok (pl. az összeadásra, szorzásra, hatványozásra vonatkozó szabályok) alkalmazásával lehetőség van a vizsgált sorozatok tulajdonságainak viszgálatára (általános tag, rekurziós képletek). Továbbá a matematikai analízis eszközei is alkalmazhatók (differenciálás, integrálás). A műveletek többsége attól függetlenül elvégezhető, hogy a fellépő sorok konvergensek-e vagy sem.

A generátorfüggvények vizsgálata egy fontos és hatékony módszer nemcsak a kombinatorikában, hanem a matematika más területein is.

Megjegyezzük, hogy végtelen sok tagú sorozatok esetén a generátorfüggvény elnevezés kissé félrevezető, mert $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$-et függvényként tekintve az $A(x)$ függvényérték konvergencia problémákat vet fel, amelyekkel nem szükséges foglalkoznunk, ha formális hatványsorokkal dolgozunk.

14.8. Feladat. A binomiális együtthatók $(1+x)^n$ generátorfüggvényéből kiindulva igazoljuk, hogy
a) $\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{r-2}+...+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}$, ahol $r\ge 0$, $r\le m$, $r\le n$, lásd 10.4. Tétel,
b) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$, ahol $n\ge 1$, lásd 7.6. Feladat.

Megoldás. a) $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$, itt a bal oldalon x^r együtthatója $\binom{m+n}{r}$. Vizsgáljuk meg mennyi x^r együtthatója a jobb oldalon.
b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$, deriválva: $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}$, és $x=1$-re $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$.