

11.3. Feladat. Legyenek $n, k \geq 1$. Hány olyan megoldása van az $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ egyenletnek, ahol $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$ egész számok és tekintettel vagyunk a sorrendre is?

Megoldás. Pl. $n = 5, k = 3$ esetén az $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ egyenlet ilyen megoldásai $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 5), (0, 5, 0), (5, 0, 0), (0, 1, 4), (0, 4, 1), (1, 0, 4), (1, 4, 0), (4, 0, 1), (4, 1, 0), (0, 2, 3), (0, 3, 2), (2, 0, 3), (2, 3, 0), (3, 0, 2), (3, 2, 0), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$, a megoldások száma 21.

Látható, hogy ez ugyanaz a probléma, mint az 11.2. Feladatbeli. Ha $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ jelöli a megoldásokat, akkor éppen $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$ lesznek az egyes dobozokba kerülő tárgyak darabszámai.

A válasz tehát: az $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ megoldások száma $\binom{n+k-1}{n}$.

11.4. Feladat. Hányféleképpen lehet n egyforma tárgyat k számozott dobozba helyezni úgy, hogy minden dobozba kerüljön legalább egy tárgy ($n \geq k \geq 1$)?

Megoldás. Az $n = 5, k = 3$ eseténél maradva tekintsünk 5 egyforma pontot (labdát): $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$. A megoldásokat adjuk meg most is elválasztójelekkel (lásd 11.2. Feladat), pl. ha az 1. dobozba 1 tárgy kerül, a 2. dobozba is 1 tárgy, a 3. dobozba 3 tárgy kerül, azaz $(1, 1, 3)$, akkor ennek megfelel: $\bullet | \bullet | \bullet \bullet \bullet$, $(2, 2, 1)$ -nek pedig megfelel $\bullet \bullet | \bullet \bullet | \bullet$. Itt két elválasztójel nem kerülhet egymás mellé, és $|$ jel nem állhat a legelején és a legvégén.

Annai megoldás van, ahányféleképpen a pontok közötti 4 helyre a 2 elválasztójelet beilleszthetjük, tehát a 4 hely közül kell kettőt kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül, ez a szám $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$.

Általánosan az n pont közötti $n - 1$ helyre kell a $k - 1$ elválasztójelet beilleszteni, tehát az $n - 1$ hely közül kell $k - 1$ -et kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül, ez a szám $C_{n-1}^{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$.

Másképp: Visszavezetjük az 11.2. Feladatra. Tegyük először minden dobozba egy-egy tárgyat. Akkor a megmaradt $n - k$ tárgyat kell még a k dobozba tenni úgy, hogy nem kell feltétlen minden dobozba további tárgyakat tenni. A 11.2. Feladat eredményét alkalmazva (n helyett $n - k$ -ra) kapjuk, hogy a lehetőségek száma $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ feltéve, hogy $n \geq k$.

Megjegyzés. Ha minden dobozba legalább r tárgynak kell kerülnie, akkor a lehetőségek száma $\binom{n-k(r-1)-1}{k-1}$. Valóban, előbb minden dobozba tegyük r tárgyat, majd osszuk szét a megmaradt $n - kr$ tárgyat. A 11.2. Feladat szerint a lehetőségek száma $\binom{n-kr+k-1}{k-1} = \binom{n-k(r-1)-1}{k-1}$. Ha $r = 1$, akkor a 11.4. Feladat feltételei teljesülnek.

11.5. Feladat. Legyenek $n, k \geq 1$. Hány olyan megoldása van az $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ egyenletnek, ahol $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 1$ egész számok és tekintettel vagyunk a sorrendre is?

Megoldás. Pl. $n = 5, k = 3$ esetén az $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ egyenlet ilyen megoldásai $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$, a megoldások száma 6.

Látható, hogy ez ugyanaz a probléma, mint az 11.4. Feladatbeli. Ha $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ jelöli a megoldásokat, akkor éppen $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 1$ lesznek az egyes dobozokba kerülő tárgyak darabszámai.

Így a válasz: az $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ megoldások száma $\binom{n-1}{k-1}$, ahol $n \geq k$. Ha $n < k$, akkor nincs megoldás (a megoldások száma nulla).

Másképp: Az egyenlet így írható: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$, ahol $x_i - 1 \geq 0$ minden i -re. Az 11.3. Feladat szerint (n helyett $n - k$ -t írva) a megoldások száma $\binom{n-1}{k-1}$.

Megjegyzés. Jelölje 11.5. Feladatbeli egyenlet megoldásainak számát $c_k(n)$, ahol $c_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$, itt k rögzített. Az egyenlet összes $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 1$ egész számú megoldásainak a száma, tekintettel a sorrendre, ahol k változó:

$$c_n = \sum_{k=1}^n c_k(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}.$$

11.6. Feladat. Hányféleképpen lehet n különböző tárgyat k számozott dobozba helyezni a sorrend figyelembevételével ($n, k \geq 1$)?

Megoldás. A 11.2. Feladathoz képest az a változás, hogy most nem n egyforma tárgyat, hanem n különböző tárgyat kell a k dobozba tenni.

A tárgyakat jelölje $\bullet_1 \bullet_2 \dots \bullet_n$, ezek most különbözők. Az elhelyezési lehetőségeket $k - 1$ elválasztójellel tudjuk megadni, pl. $n = 5, k = 3$ esetén $\bullet_2 \bullet_3 | \bullet_1 | \bullet_4$, vagy $\bullet_4 \bullet_2 || \bullet_1 \bullet_3$. Ezt az $n + k - 1$ jelet tetszőlegesen permutálhatjuk. A megoldások száma így $P_{n+k-1}^{(1,1,\dots,1,k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = k(k+1)(k+2) \cdots (k+n-1)$.

Ha $n = 5, k = 3$, akkor a lehetőségek száma $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520$.

Másképp: Az elhelyezést két lépésben végezzük. 1. lépés: Sorbatesszük a tárgyakat, erre $P_n = n!$ lehetőség van. 2. lépés: A tárgyakat egyformáknak tekintve a dobozokba tesszük, a lehetőségek száma a 11.2. Feladat szerint $\binom{n+k-1}{k-1}$. A szorzási szabály szerint a elhelyezések száma $n! \binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$.

Megjegyzés. Az eredmény így is megadható: $[k]^n = k(k+1)(k+2) \cdots (k+n-1)$.

11.7. Feladat. Adott n A-típusú különböző tárgy és k B-típusú különböző tárgy ($n, k \geq 1$). Hányféle sorrendje lehetséges ezeknek úgy, hogy két B-típusú tárgy nem kerülhet egymás mellé?

Megoldás. Először helyezzük el egymás mellé az n db A-típusú tárgyat. Az elhelyezések száma $P_n = n!$. Ezután a k db B-típusú tárgy számára $n+1$ hely van, ugyanis az A-típusúak közé lehet tenni őket (a legelejére és a legvégére is lehet tenni). Az $n+1$ helyből kell k számú helyet kiválasztani úgy, hogy a sorrend is számít. A lehetőségek száma V_{n+1}^k , feltéve, hogy $k \leq n+1$. A válasz: $P_n V_{n+1}^k = \frac{n!(n+1)!}{(n-k+1)!}$, ha $k \leq n+1$. Ha $k > n+1$, akkor a ez a szám 0.

11.8. Feladat. Adott n A-típusú egyforma tárgy és k B-típusú egyforma tárgy ($n, k \geq 1$). Hányféle sorrendje lehetséges ezeknek úgy, hogy két B-típusú tárgy nem kerülhet egymás mellé?

Megoldás. Pl. hányféleképpen lehet sorba rendezni n db nullát (A-típus) és k db egyest (B-típus) úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

1. mód. Hasonlóan, mint a 11.7. Feladat megoldása, de most a sorrend nem számít, mivel egyforma elemekről (tárgyakról) van szó. Először helyezzük el az n nullát. Ekkor a k db egyes számára $n+1$ hely van, a nullák közé lehet tenni őket (a legelejére és a legvégére is lehet tenni). Pl. $n = 5$, $k = 3$ esetén: 10010100, 01001001, 00010101, stb. Az $n+1$ helyből kell k számú helyet kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít. A lehetőségek száma $C_{n+1}^k = \binom{n+1}{k}$, feltéve, hogy $k \leq n+1$. Ha $n = 5$, $k = 3$, akkor ez $\binom{6}{3} = 20$. Ha $k > n+1$, akkor a lehetőségek száma 0.

2. mód. Először a k egyes közé beírunk $k-1$ nullát, így egy ilyen sorozatot kapunk: 101010...10, majd a többi $n-k+1$ nullát tetszőlegesen beillesztjük úgy, hogy a legelejére és a legvégére is tehetünk. Tehát $n-k+1$ nullát $k+1$ helyre teszünk ismétléssel: $\overline{C}_{k+1}^{n-k+1} = C_{k+1+n-k+1-1}^{n-k+1} = C_{n+1}^{n-k+1} = \binom{n+1}{n-k+1} = \binom{n+1}{k}$. Pl. $n = 5$, $k = 3$ -ra előbb a $k = 3$ egyes közé a $k-1 = 2$ nullát beírva 10101, majd még $n-k+1 = 3$ nullát beillesztve: 10010010, 01001010, 01001001, stb.

11.9. Feladat. a) A könyvespolcon 15 különböző könyv van. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani 7 könyvet úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?

b) Hányféleképpen lehet n könyv közül k könyvet kiválasztani úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?

Megoldás. a) Alkalmazzuk a 11.8. Feladat eredményét. A kiválasztott könyvhöz 1-est rendelünk, a többihez 0-t, ahol két 1-es nem lehet egymás mellett. Tehát $k = 7$ db 1-est és $n = 8$ db 0-t kell elhelyeznünk az adott módon. A keresett érték: $\binom{n+1}{k} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$.

b) A keresett érték $\binom{n-k+1}{k}$. Ez akkor nem nulla, ha $k \leq n-k+1$, azaz $2k-1 \leq n$, tehát ekkor lehet n könyv közül k könyvet az adott módon kiválasztani.

12. Kombinatorika a geometriában

12.1. Feladat. Hány átlója van egy n oldalú konvex sokszögnek ($n \geq 4$)?

Megoldás. Minden csúcsból $n-3$ átló indul ki, mert egy csúcs a szomszédos csúcsokkal és önmagával nem határoz meg átlót. Mivel n csúcs van, $n(n-3)$ megadja az átlók számának kétszeresét, mert minden átlót mindkét végpontjánál számoltunk. Az átlók száma $\frac{n(n-3)}{2}$.

Másképp: az átlók és az oldalak száma együttesen $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, mert az n csúcs közül kell a két végpontot kiválasztani. Így az átlók száma $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

12.2. Feladat. Hány pontban metszik egymást egy n oldalú konvex sokszög átlói, ha tudjuk, hogy bármely három átlónak nincs közös pontja?

Megoldás. Bármely két átló metszi egymást. Minden metszéspontnak megfelel az a négy csúcs, amelyek a megfelelő átlók végpontjai, és a sokszög bármely négy csúcsa meghatároz két átlót és ezek egy metszéspontját. A válasz: $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ ($n \geq 4$).

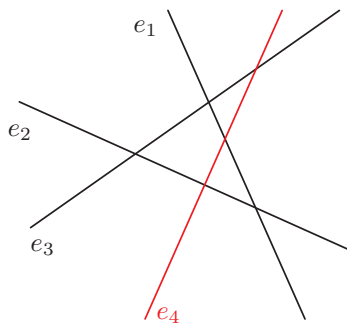
Azt mondjuk, hogy n egyenes általános helyzetű a síkban, ha bármely kettő metszi egymást, de bármely háromnak nincs közös pontja. Hasonlóan, n sík általános helyzetű a térben, ha bármely háromnak van közös pontja, bármely négynek viszont nincs.

12.3. Feladat. Hány részre osztja a síkot n általános helyzetű egyenes?

Megoldás. Jelölje E_n ezt a számot. Itt $E_1 = 2$, $E_2 = 4$, $E_3 = 7$. Rajzoljunk meg n egyenest, amelyek a síkot E_n részre osztják. Az $(n+1)$ -edik egyenest meghúzva, ez az előbbi n egyenes mindegyikét metszi és az n metszéspont az $(n+1)$ -edik egyenest $(n+1)$ -részre osztja. Minden rész egy síkbeli tartományt kettévág, tehát így a síkrészek száma $(n+1)$ -gyel növekszik. Kapjuk a következő rekurziót:

$$E_{n+1} = E_n + (n+1), \quad n \geq 1.$$

Például, ha $n = 3$, akkor adottak az e_1, e_2, e_3 egyenesek és rajzoljunk meg újabb e_4 egyenest, amely három (különböző) pontban metszi az előző egyeneseket, lásd a 2. ábrát. Ezek a metszéspontok e_4 -et négy részre osztják. Mindegyik rész egy síkbeli tartományt kettévág, tehát a síkrészek száma 4-gyel növekszik: $E_4 = E_3 + 4$, $E_4 = 7 + 4 = 11$.



2. ábra

Összeadva az $E_2 = E_1 + 2$, $E_3 = E_2 + 3$, $E_4 = E_3 + 4$, ..., $E_{n-1} = E_{n-2} + (n-1)$, $E_n = E_{n-1} + n$ egyenleteket kapjuk, hogy $E_n = E_1 + (2 + 3 + \dots + (n-1) + n)$, ahonnan $E_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.

Megjegyzés. $E(n)$ így is írható: $E(n) = 1 + \binom{n+1}{2}$, vagy $E(n) = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$.

12.4. Feladat. Hány részre osztja a teret n általános helyzetű sík?

Megoldás. Jelölje S_n a keresett számot. Itt $S_1 = 2$, $S_2 = 4$. Tekintsünk n síkot, amelyek a teret S_n részre osztják. Egy $(n+1)$ -edik síkot az előbbi síkok E_n részre osztanak a metszésvonalakkal, ahol E_n a 12.3. Feladatbeli szám. Az $(n+1)$ -edik sík E_n számú része minden eddigi térrészt kettéoszt, így a térrészek számát E_n -nel növeli. Következik, hogy

$$S_{n+1} = S_n + E_n, \quad n \geq 1.$$

Felírva ezt $n = 1, 2, 3, \dots, n-1$ -re és összeadva a kapott egyenleteket kapjuk, hogy $S_n = 2 + E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1}$. Használva, hogy $E_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, innen $S_n = 2 + (n-1) + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n}{2}$, $S_n = n + 1 + \binom{n+1}{3}$ a binomiális együtthatók felső összegzési tulajdonsága szerint (10.2. Tétel), tehát $S_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$.

Megjegyezzük, hogy az addíciós képletet használva S_n így is írható: $S_n = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$.

Azonnali, hogy n különböző pont az egyenest $P_n = n + 1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ részre osztja. Vegyük észre, hogy a rekurzív képletek szerint az (S_n) sorozat különbségsorozata az (E_n) számsorozat, (E_n) különbségsorozata pedig a (P_n) számsorozat, azaz $S_{n+1} - S_n = E_n$, $E_{n+1} - E_n = P_n$ minden n -re.

Innen az egymást követő P_n , E_n , S_n értékek könnyen meghatározhatók, lásd a 3. Táblázatot, ahol az E_n és az S_n sorában a második számtól kezdődően minden szám az előtte álló N szám és az N fölött álló számok összege.

n	1	2	3	4	5	6
P_n	2	3	4	5	6	7
E_n	2	4	7	11	16	22
S_n	2	4	8	15	26	42

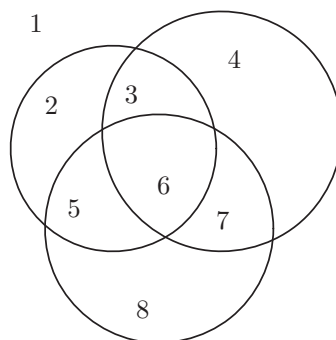
3. Táblázat

Azt mondjuk, hogy n kör általános helyzetű a síkban, ha bármely kettőnek két közös pontja van, bármely háromnak viszont nincs közös pontja.

12.5. Feladat. Hány részre osztja a síkot n általános helyzetű kör?

Megoldás. Jelölje K_n a keresett számot. Itt $K_1 = 2$, $K_2 = 4$, $K_3 = 8$. Három általános helyzetű kör a síkot 8 részre osztja, lásd a 3. ábrát. Hány részre osztja a síkot négy kör?

Igaz-e vajon, hogy $K_n = 2^n$ minden n -re?



3. ábra