

10. A binomiális együtthatók tulajdonságai

Térjünk vissza a binomiális együtthatókhoz. Ezek további tulajdonságait rögzítik a következő tételek.

10.1. Tétel. 1) (Elnyelési tulajdonság) Ha $1 \leq k \leq n$, akkor $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}}$.

2) (Trinomiális alak) Ha $1 \leq m \leq k \leq n$, akkor $\boxed{\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}}$.

Bizonyítás. 1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

2) Algebrai úton az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ képlet alapján. Végezzük el!

Kombinatorikus eljárás: Adott n fő (személy), akikből egy k tagú bizottságot kell választani, majd a k fős bizottság tagjai közül egy m fős albizottságot kell létrehozni. Ez $\binom{n}{k} \binom{k}{m}$ -féleképpen tehető meg. Ugyanezt másképp összeszámolva: Először az n főből kiválasztjuk az m tagú albizottságot, majd a fennmaradó $n-m$ személy közül kiválasztjuk azt a $k-m$ főt, akik a bizottságnak az albizottságon kívüli részét képezik. A lehetőségek száma: $\binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$. $\square$

10.2. Tétel. 1) (Felső összegzés) Ha $1 \leq k \leq n$, akkor

$$\boxed{\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}}.$$

2) (Párhuzamos összegzés) Ha $n, m \geq 0$, akkor

$$\boxed{\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \dots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}}.$$

Bizonyítás. 1) Adjuk össze az addíciós képletből származó következő egyenlőségeket:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\ \binom{n-1}{k} &= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \\ \binom{n-2}{k} &= \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k-1} \\ &\dots\dots\dots \\ \binom{k+1}{k} &= \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \end{aligned}$$

Összevonás után a bal oldalon csak az $\binom{n}{k}$ első tag marad, a jobb oldal első oszlopában pedig csak az $1 = \binom{k}{k} = \binom{k-1}{k-1}$ utolsó tag.

Másképp, kombinatorikus úton: Az $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ halmaznak $\binom{n}{k}$ számú k -elemű részhalmaza van. Csoportosítsuk ezeket a részhalmazokat a legkisebb elemük szerint:

az 1 a legkisebb elem $\binom{n-1}{k-1}$ számú részhalmazban, mert az 1-hez a $2, 3, \dots, n$ számok közül kell még $k-1$ számot választani,

a 2 a legkisebb elem $\binom{n-2}{k-1}$ számú részhalmazban, mert a 2-höz a $3, 4, \dots, n$ számok közül kell még $k-1$ számot választani,

.....

az $n-k+1$ a legkisebb elem $\binom{n-(n-k+1)}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} = 1$ számú részhalmazban, itt az $n-k+1$ -et követő számok az $n-k+2, \dots, n$ lesznek.

2)

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \dots + \binom{m+n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} =$$

$$= \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \dots + \binom{m+n}{m} \stackrel{(2)}{=} \binom{m+n+1}{m+1} \stackrel{(3)}{=} \binom{m+n+1}{n},$$

ahol a következőket használtuk: (1) - szimmetria-tulajdonság, (2) - felső összegzés (a jelen tétel 1) pontja), (3) - szimmetria-tulajdonság. $\square$

10.3. Feladat. Igazoljuk, hogy az $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ halmaz összes k -elemű részhalmazai legkisebb elemeinek a számtani középárányosa $\frac{n+1}{k+1}$.

10.4. Tétel. 1) (Vandermonde-azonosság) Ha $0 \leq r$ és $r \leq m, r \leq n$, akkor

$$\binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{r-2} + \dots + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}.$$

2) Ha $n \geq 0$, akkor

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Bizonyítás. 1) Kombinatorikus eljárás: Legyen A egy m elemű halmaz, B pedig egy n elemű halmaz úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$. Akkor $A \cup B$ számossága $m+n$. Hány r elemű részhalmaza van $A \cup B$ -nek? Egyrészt $\binom{m+n}{r}$. Másrészt, minden r elemű részhalmazt megkapunk úgy, hogy összes lehetséges módon vesszük A -nak egy k elemű részhalmazát, B -nek egy $r-k$ elemű részhalmazát és képezzük ezek unióját, ahol $0 \leq k \leq r$. A lehetőségek száma éppen a 1) képletben a bal oldali összeg.

2) A Vandermonde-azonosságban legyen $m=n, r=n$ és használjuk a binomiális együtthatók szimmetria-tulajdonságát. $\square$

10.5. Feladat. Legyen $0 \leq m \leq n$. Igazoljuk, hogy $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$.

Megoldás. $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=m}^n \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^n \binom{n-m}{k-m} \stackrel{(2)}{=} \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} \stackrel{(3)}{=} \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$, ahol a következőket használtuk: (1) - trinomiális alak, (2) - összegzési index csere: $j = k - m$, (3) - a binomiális együtthatók összegére vonatkozó képlet.

Foglaljuk össze a binomiális együtthatók legfontosabb tulajdonságait:

(1) Faktoriális kifejtés (5.3. Tétel): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \leq k \leq n$.

(2) Szimmetria-tulajdonság (5.4. Tétel): $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, 0 \leq k \leq n$.

(3) Elnyelési tulajdonság (10.1. Tétel): $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, 1 \leq k \leq n$.

(4) Addíciós képlet (7.3. Tétel): $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, 1 \leq k \leq n$.

(5) Trinomiális alak (10.1. Tétel): $\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}, 1 \leq m \leq k \leq n$.

(6) Binomiális tétel (7.1. Tétel): $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n, n \geq 1$.

(7) Felső összegzés (10.2. Tétel): $\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}, 1 \leq k \leq n$.

(8) Párhuzamos összegzés (10.2. Tétel):

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \dots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}, \quad n, m \geq 0.$$

(9) Vandermonde-azonosság (10.4. Tétel):

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \dots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}, \quad 0 \leq r, r \leq m, r \leq n.$$

(10) Binomiális együtthatók négyzetösszege (10.4. Tétel):

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

11. Összeszámlálási feladatok

11.1. Feladat. Adott n különböző tárgy és r doboz ($n, r \geq 1$). Helyezzük a tárgyakat a dobozokba úgy, hogy az 1. dobozba k_1 tárgy kerüljön, a 2. dobozba k_2 tárgy, ..., az r -edik dobozba k_r tárgy, ahol $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás. Az 1. dobozba $\binom{n}{k_1}$ -féleképpen választható meg a k_1 tárgy (a sorrend nem számít). Ezután a 2. dobozba a megmaradt $n - k_1$ közül bármelyiket választhatjuk $\binom{n-k_1}{k_2}$ -féleképpen. A 3. dobozba a megmaradt $n - k_1 - k_2$ közül bármelyiket választhatjuk $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ -féleképpen, stb. A lehetőségek száma így

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \dots \binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}{k_r} = \\ &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \dots \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{r-1})!}{k_r!0!} = \frac{n!}{k_1!k_2! \dots k_r!}, \end{aligned}$$

ami nem más, mint n elem $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ típusú ismétléses permutációinak $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$ száma.

Ez közvetlenül is belátható: Számozzuk meg az n tárgyat és a sorszámkat írjuk le egymás mellé. Írjunk 1-eseket azon sorszámkok alá, amelyek az 1. dobozba kerültek (k_1 db 1-es lesz), írjunk 2-eseket azon sorszámkok alá, amelyek a 2. dobozba kerültek (k_2 db 2-es), ..., írjunk r -eseket azoknak a tárgyaknak a sorszámai alá, amelyek az r -edik dobozba kerültek (k_r db r -es). Így egy $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ típusú ismétléses permutációt kapunk. Fordítva, minden ilyen ismétléses permutációnak megfelel egy dobozokba osztás.

Pl. $n = 10$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 3$, $k_4 = 1$ esetén:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad \text{vagy} \quad \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}, \text{ stb.}$$

11.2. Feladat. Hányféleképpen lehet n egyforma tárgyat k számozott dobozba helyezni úgy, hogy nem kell feltétlenül minden dobozba tárgyat tenni ($n, k \geq 1$)?

Megoldás. Az $n = 5$, $k = 3$ esetben tekintsünk 5 egyforma pontot (labdát): $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$.

Az elhelyezési lehetőségeket adjuk meg | elválasztójelekkel, pl. $\bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet$ azt jelenti, hogy az 1. dobozba 1 tárgy kerül, a 2. dobozba 3 tárgy, a 3. dobozba 1 tárgy kerül, ez az $(1, 3, 1)$ rendezett számhármassal is jellemezhető. Más példa: $\bullet \bullet || \bullet \bullet \bullet$ azt jelenti, hogy az 1. dobozba 2 tárgy kerül, a 2. dobozba nem kerül tárgy, a 3. dobozba 3 tárgy kerül, azaz $(2, 0, 3)$.

Két elválasztójel is kerülhet egymás mellé, és | jel állhat a legelején, vagy a legvégén. Két | jelre van szükség, amelyek elválasztják a pontokat. A pontokkal együtt ez $5 + 2 = 7$ jel, amelyeket tetszőlegesen permutálhatunk. A megoldások száma így $P_7^{(5,2)} = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

Általánosan $k - 1$ db | jelre van szükség, az n db ponttal együtt ez $n + k - 1$ jel, amelyeket tetszőlegesen permutálhatunk. A megoldások száma

$$P_{n+k-1}^{(n,k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Másképp: Annyi lehetőség van, ahányféleképpen az $n + k - 1$ pozíció közül kiválasztható az a $k - 1$, ahova az elválasztójelek kerülnek (illetve az az n hely, ahová a labdák kerülnek), és ez kombinációk definíciója szerint $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

Megjegyzés: az egyes dobozokban nem számít a tárgyak sorrendje.