

8. A polinomiális tétel

A binomiális tétel egy általánosítása az $(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n$ kifejtésére vonatkozó polinomiális tétel.

8.1. Tétel. Ha $r \geq 1$, $n \geq 1$ egész számok és $a_1, a_2, \dots, a_r$ tetszőleges komplex számok, akkor

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r},$$

ahol az összeg a $k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0$ számok összes olyan megválasztására vonatkozik, a sorrend figyelembevételével, amelyekre $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$.

Bizonyítás. Az $(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n$ kifejezést egy n -tényezős szorzatként tekintve és „minden tagot minden taggal szorozva” azt kapjuk, hogy

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq r} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n},$$

ahol $i_1, i_2, \dots, i_n$ az $1, 2, \dots, r$ elemek n -edosztályú ismétléses variációi. Itt minden tag $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$ alakra hozható, ahol $k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0$ és $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Kérdés: Adott $k_1, k_2, \dots, k_r$ esetén hány ilyen tag van?

Az $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$ szorzatból (a tényezők felcserélésével) akkor kapunk ilyen $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$ tagot, ha az $i_1, i_2, \dots, i_n$ között pontosan k_1 db 1-es, k_2 db 2-es, ..., k_r db r -es van. Így $i_1, i_2, \dots, i_n$ az $1, 2, \dots, r$ ismétléses permutációi és számuk $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$. $\square$

Az együtthatók a polinomiális együtthatók (a „polinom” görög eredetű szó, jelentése „több tag”, ez az $a_1 + a_2 + \dots + a_r$ többtagú összegre vonatkozik).

8.2. Feladat. Adjuk meg $(a + b + c)^3$, $(a + b + c)^4$, $(1 + x + x^2)^3$, $(x + y + z + t)^3$ kifejtéseit.

8.3. Feladat. Igazoljuk, hogy a polinomiális együtthatók összege:

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_r = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} = r^n.$$

Megoldás. A polinomiális tételben legyen $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$.

9. Szitaképletek

Jelölje $|X|$ az X véges halmaz elemeinek a számát. Ha A és B véges halmazok, akkor

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Valóban, a jobb oldalon $|A| + |B|$ felírásával kétszer számoltuk a közös elemeket, egyszer A -nál, egyszer B -nél, ezért le kell vonni a közös elemek számát, azaz $|A \cap B|$ -t. Hasonlóképpen gondolható végig, hogy ha A , B és C véges halmazok, akkor

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Itt a három halmaz közös elemeit tekintve, ezek számát $|A| + |B| + |C|$ felírásával háromszor hozzáadtuk, majd háromszor levontuk ($-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$), az $|A \cap B \cap C|$ felírásával pedig egyszer ismét hozzáadtuk.

Általánosítva ezeket a képleteket igazoljuk, hogy

9.1. Tétel. (Szitaképlet, a tartalmazás és kizárás elve) Ha $A_1, A_2, \dots, A_r$ véges halmazok, akkor

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + \\ &+ (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Lássuk be, hogy az $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ halmaz minden elemét a jobb oldalon pontosan egyszer számoltuk. Tegyük fel, hogy egy tetszőleges x elem az $A_1, A_2, \dots, A_r$ halmazok közül p számúnak eleme ($1 \leq$

$p \leq r$), a többinek nem. Feltehető (átjelölve a halmazokat), hogy $x \in A_1$, $x \in A_2, \dots$, $x \in A_p$ és $x \notin A_{p+1}, \dots$, $x \notin A_r$. Akkor x -et a képlet jobb oldalán m -szer számoltuk, ahol

$$m = p - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p},$$

de itt $m = 1$ a 7.2. Tétel második képlete alapján. $\square$

Megjegyezzük, hogy a szitaképlet r -szerinti indukcióval is igazolható. Ez a képlet megadja az $A_1, A_2, \dots, A_r$ halmazok uniójának számosságát, ha ismerjük az $A_1, A_2, \dots, A_r$ halmazok elemszámát és az összes $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_j \cap A_k$, ... metszet elemszámát. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_r \subseteq E$. Kérdés: Mennyi az E -re vonatkozó $E \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r) = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r}$ kiegészítő halmaz számossága?

9.2. Tétel. (Szitaképlet, második alak) Ha $A_1, A_2, \dots, A_r \subseteq E$ véges halmazok, akkor

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r}| = & |E| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + \\ & + (-1)^r |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|. \end{aligned}$$

Bizonyítás. $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r}| = |E| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r|$ és alkalmazzuk az előző Tételt. $\square$

9.3. Feladat. Legyen $n > 1$, $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ kanonikus alakú természetes szám. Jelölje $\phi(n)$ azoknak az a számoknak a számát, amelyekre $1 \leq a \leq n$ és $(a, n) = 1$ (a és n relatív prímek), ez az Euler-féle számelméleti függvény. Adjunk képletet $\phi(n)$ -re!

Megoldás. Legyen $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = \{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq n, p_i \mid a\}$, $1 \leq i \leq r$. Akkor $\phi(n) = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r}|$. Itt, ha $i < j < k$, akkor $A_i \cap A_j = \{a : 1 \leq a \leq n, p_i p_j \mid a\}$, $A_i \cap A_j \cap A_k = \{a : 1 \leq a \leq n, p_i p_j p_k \mid a\}, \dots$, és kapjuk, hogy $|A_i| = \frac{n}{p_i}$, $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k}$, Következik, hogy

$$\begin{aligned} \phi(n) = & n \left(1 - \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{1}{p_i p_j} - \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} + \dots + (-1)^r \frac{1}{p_1 \dots p_r} \right) = \\ & = n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r} \right). \end{aligned}$$

9.4. Tétel. (Speciális szitaképlet) Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_r \subseteq E$ véges halmazok. Ha minden k esetén ($1 \leq k \leq r$) az $A_1, A_2, \dots, A_r$ halmazok közül bármely k különböző metszete azonos elemszámú, akkor

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r}| = & |E| - \binom{r}{1} |A_1| + \binom{r}{2} |A_1 \cap A_2| - \binom{r}{3} |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + \\ & + (-1)^r \binom{r}{r} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Azonnali a szitaképlet második alakjából. $\square$

9.5. Feladat. Legyen A egy k elemű halmaz, B pedig egy n elemű halmaz ($n, k \geq 1$). Hány $f : A \rightarrow B$ szürjektív függvény létezik?

Megoldás. Ha $k > n$, akkor nem létezik $f : A \rightarrow B$ szürjektív függvény. Legyen $k \leq n$. Feltehetjük, hogy $A = \{1, 2, \dots, k\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Legyen E az összes $f : A \rightarrow B$ függvény halmaza, A_i pedig az olyan $f : A \rightarrow B$ függvényeknek a halmaza, amelyekre i nem képelem, ahol $1 \leq i \leq n$. Akkor az $f : A \rightarrow B$ szürjektív függvény halmaza $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}$. Ha $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, akkor $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}$ azoknak az $f : A \rightarrow B$ függvényeknek a halmaza, amelyekre $i_1, i_2, \dots, i_r$ egyike sem képelem. Az ilyen függvények száma $(n-r)^k$, lásd 4.4. A 9.4. Tétel szerint kapjuk, hogy

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}| = n^k + \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k,$$

ahol elegendő $r = 0$ -tól $r = n - 1$ -ig venni a tagokat, mert $r = n$ -re az utolsó tag 0.

Az $f : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ szürjektív függvények száma tehát

$$s_{k,n} = n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \dots + (-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}2^k + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

Ha $k > n$, akkor nincs szürjektív függvény, ezért $s_{k,n} = 0$ és következik, hogy a fenti összeg értéke nulla.

Ha $n = k$, akkor $s_{n,n}$ az $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijektív függvények száma, ami $n!$, és a következő egyenlőséget kapjuk:

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

Az $s_{k,n}$ -re adott képlet így is írható: $s_{k,n} = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k = (-1)^n \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} j^k$, ahol a $j = n - r$ helyettesítést végeztük és használtuk, hogy $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$.

9.6. Feladat. Legyen σ egy n -edfokú permutáció. Azt mondjuk, hogy i a σ fixpontja, ha $\sigma(i) = i$ (i a helyén marad). Hány olyan n -edfokú permutáció van, amelynek nincs fixpontja (egy szám se marad a helyén)?

Megoldás. Legyen A_i azoknak a σ permutációknak a halmaza, amelyeknek i fixpontja, azaz $\sigma(i) = i$, ahol $1 \leq i \leq n$. Akkor a fixpont nélküli permutációk száma: $D_n = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}|$. Ha $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ tetszőleges számok, akkor $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}$ azoknak a σ permutációknak a halmaza, amelyeknek $i_1, i_2, \dots, i_r$ fixpontjai, azaz $\sigma(i_1) = i_1, \sigma(i_2) = i_2, \dots, \sigma(i_r) = i_r$, és így $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}| = (n-r)!$.

A speciális szitaképlet szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! = \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy itt $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$, ahol $e \approx 2,718$ a természetes logaritmus alapszáma. Az $L = \frac{1}{e} \approx 0,367$ érték annak a valószínűségének tekinthető, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott permutáció fixpont nélküli legyen.

A fenti képletből azonnali a következő rekurzió: $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, ahol $n \geq 1$ és $D_0 = 1$ (megállapodás szerint). Innen meghatározhatók D_n egymást követő értékei: $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44, D_6 = 265, \dots$.

9.7. Feladat. Hány olyan n -edfokú permutáció van, amelynek pontosan r fixpontja van ($0 \leq r \leq n$)?

Megoldás. A választ a $D_{n,r} = \binom{n}{r} D_{n-r}$ képlet adja, ugyanis az r fixpont $\binom{n}{r}$ -féleképpen választható meg, a többi $n-r$ elem pedig egy olyan $(n-r)$ -edfokú permutációt határoz meg, amely fixpont nélküli és ezek száma D_{n-r} . Alkalmazzuk ezek után a szorzási szabályt.

Megjegyzés. Csoportosítsuk az n -edfokú permutációkat aszerint hogy hány fixpontjuk van. Az összes n -edfokú permutáció száma $n!$ és a következő képletet kapjuk:

$$n! = \sum_{r=0}^n D_{n,r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} D_{n-r}.$$