

5. Kombinációk

5.1. Feladat. Az 1, 2, 3, 4 számok közül válasszunk ki kettőt (két különbözőt) és írjuk fel ezeket úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a kiválasztott elemek sorrendjére. Mennyi a lehetőségek száma?

Megoldás. Hat lehetőség van, ezek a következők:

12 13 14 23 24 34

5.2. Definíció. Legyen adott n különböző elem ($n \geq 1$). Válasszunk ki közülük k elemet, ahol $1 \leq k \leq n$ és írjuk fel ezeket úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a kiválasztott elemek sorrendjére. Ezeket az elemsorozatok az n **elem k -adosztályú kombinációinak** nevezzük. Jelölje C_n^k az n elem k -adosztályú kombinációinak a számát.

Ha az 1, 2, ..., n elemek k -adosztályú kombinációit tekintjük, akkor a számokat (általában) nagyságrendi sorrendben írjuk.

Az 5.1. Feladatban $C_4^2 = 6$. Kérdés: Mennyi C_n^k ?

5.3. Tétel. Ha $1 \leq k \leq n$, akkor $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}$, $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$.

Ha $0 \leq k \leq n$, akkor $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges, rögzített kombinációt. Ha az ebben szereplő k elemet permutáljuk, akkor nem kapunk új kombinációt. Ugyanakkor ezek n elem k -adosztályú variációinak tekinthetők. Így módon a rögzített k -adosztályú kombinációból $k!$ számú k -adosztályú variációt kapunk, s így a C_n^k számú kombinációból $k!C_n^k$ számú variációhoz jutunk. Ezek a variációk mind különbözőek és minden variációt megkapunk, ezért $V_n^k = k!C_n^k$, azaz $C_n^k = V_n^k/k! = V_n^k/P_k$. A többi képlet a V_n^k -ra vonatkozó előbbi képletekből adódik. $\square$

Ha $k = 0$, akkor innen $C_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$, ami megfelel annak, hogy n elemből 0 számú elemet egyféleképpen választhatunk ki: úgy, hogy egy elemet se veszünk.

5.4. Tétel. (Szimmetria-tulajdonság) Ha $0 \leq k \leq n$, akkor $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Bizonyítás. Azonnali az 5.3. Tétel utolsó képlete szerint. Másképp: Az n elemből k elemet kiválasztani ugyanazt jelenti, mint a többi $n - k$ elemet nem kiválasztani. Ezt annyiféleképpen lehet, ahányféleképpen az $n - k$ elemet ki tudjuk választani. $\square$

Figyeljük meg, hogy minden $n \geq 1$ -re $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^3 = C_n^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \dots$. Ha $k > n$, akkor nem lehet kombinációkat képezni, ezért $k > n$ esetén célszerű használni, hogy $C_n^k = 0$.

A n elem k -adosztályú kombinációi számának más jelölése $\binom{n}{k}$, olvasd „ n alatt k ”. Tehát

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

ezeket a számokat binomiális számoknak vagy binomiális együtthatóknak is nevezzük, lásd később a binomiális tételt.

Itt $\binom{n}{k} = P_n^{(k, n-k)}$, lásd 2.4. Ez az egyenlőség közvetlenül is belátható. Tekintsünk n elemet, amelyek k -adosztályú kombinációit képezzük. Írjunk mindegyik elem alá 1-et vagy 0-t aszerint, hogy kiválasztottuk a kombináció képzésekor vagy sem. Pl. ha $n = 5$, az elemek a, b, c, d, e és $k = 3$, akkor az a, c, d és a, d, e kombinációk esetén legyen: 10110, ill. 10011. Így minden k -adosztályú kombinációnak megfelel egy k számú 1-esből és $n - k$ számú 0-ból álló ismétléses permutáció, és különböző k -adosztályú kombinációknak különböző ilyen ismétléses permutációk felelnek meg.

A következő definíció is adható:

5.5. Definíció. Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait n elem k -adosztályú kombinációinak nevezzük.

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma tehát $\binom{n}{k}$. Így a $k = 0$ elemű részhalmazok száma $\binom{n}{0} = 1$, ez az üres halmaz ($\emptyset$), a $k = 1$ elemű részhalmazok száma $\binom{n}{1} = n$, ..., a $k = n$ elemű részhalmazok száma $\binom{n}{n} = 1$, ez az adott halmaz.

5.6. Tétel. Legyen $n \geq 1$.

1) Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak a száma 2^n .

$$2) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás. 1) A részhalmazokat úgy kapjuk, hogy az adott halmaz bizonyos elemeit kiválasztjuk a részhalmazba, a többit pedig nem. Így mind az n elemre két lehetőség van: vagy kiválasztjuk, vagy sem. Így a lehetőségek száma, és ezzel együtt a részhalmazok száma $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n\text{-szer}} = 2^n$.

2) Az 1) pont azonnali következménye. $\square$

5.7. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, \dots, k\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Hány $f : A \rightarrow B$ szigorúan növekvő függvény létezik?

Megoldás. Legyen $f(1) = a_1 \in B$, $f(2) = a_2 \in B, \dots, f(k) = a_k \in B$. Feltétel: $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Ez csak akkor lehetséges, ha $k \leq n$ és ekkor a lehetőségek száma, tehát az $f : A \rightarrow B$ szigorúan növekvő függvények száma éppen C_n^k (a definíció szerint).

Ennek alapján az $1, 2, \dots, n$ elemek k -adosztályú kombinációi úgy is definiálhatók, mint az $f : A \rightarrow B$ szigorúan növekvő függvények.

5.8. Feladat. Igazoljuk, hogy minden $k \geq 1$ -re k egymásutáni egész szám szorzata osztható $k!$ -sal.

Megoldás. Feltessük, hogy az adott számok mind pozitívak, legyenek ezek (fordított sorrendben) $n, n-1, \dots, n-k+1$, ahol $n \geq k$. Akkor szorzatuk $n(n-1) \dots (n-k+1) = k! C_n^k$. Itt C_n^k egész szám és következik, hogy $n(n-1) \dots (n-k+1)$ osztható $k!$ -sal.

Ennek következményeként adódik, hogy két egymásutáni egész szám szorzata osztható 2-vel, három egymásutáni egész szám szorzata osztható 6-tal, stb.

6. Ismétléses kombinációk

6.1. Feladat. Az $1, 2, 3, 4$ számok közül válasszunk ki kettőt úgy, hogy ugyanazt az elemet kétszer is vehetjük, de nem vagyunk tekintettel a kiválasztott elemek sorrendjére. Mennyi a lehetőségek száma?

Megoldás. A következőket kapjuk:

11 12 13 14 22 23 24 33 34 44

A lehetőségek száma 10.

6.2. Definíció. Legyen adott n különböző elem ($n \geq 1$). Válasszunk ki közülük k elemet, ahol $k \geq 1$ úgy, hogy ugyanazt az elemet többször is vehetjük és írjuk fel ezeket úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a kiválasztott elemek sorrendjére. Ezeket az elemsorozatokokat az n elem k -adosztályú ismétléses kombinációinak nevezzük. Jelölje $\overline{C}_n^k$ az n elem k -adosztályú ismétléses kombinációinak a számát.

Ha az $1, 2, \dots, n$ elemek k -adosztályú ismétléses kombinációit tekintjük, akkor a számokat (általában) nagyságrendi sorrendben írjuk úgy, hogy ismétlődések is lehetnek.

A 6.1. Feladatban $\overline{C}_4^2 = 10$. Kérdés: Mennyi $\overline{C}_n^k$?

6.3. Tétel. Ha $n, k \geq 1$, akkor $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$, $\overline{C}_n^k = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+k-1)}{k!}$.

Ha $n \geq 1, k \geq 0$, akkor $\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy bijektív leképezés létesíthető n elem k -adosztályú ismétléses kombinációi és $n+k-1$ elem k -adosztályú (ismétlés nélküli) kombinációi között. Innen következni fog, hogy $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Tekintsünk az $1, 2, \dots, n$ elemek egy tetszőleges, rögzített $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ ismétléses kombinációját, ahol $1 \leq a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_k} \leq n$. Adjuk hozzá az elemekhez rendre a $0, 1, 2, \dots, k-1$ számokat, azaz legyen

$$a_{i_1}, a_{i_2} + 1, \dots, a_{i_k} + (k-1).$$

Ez az $1, 2, \dots, n+k-1$ elemeknek egy ismétlés nélküli kombinációja, mert itt $1 \leq a_{i_1} < a_{i_2} + 1 < \dots < a_{i_k} + (k-1) \leq n+k-1$. Minden ilyen ismétlés nélküli kombinációt megkapunk és pontosan egyszer. Fordítva,

ha $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}$ az $1, 2, \dots, n+k-1$ elemek egy ismétlés nélküli kombinációja, akkor $b_{i_1}, b_{i_2}-1, \dots, b_{i_k}-(k-1)$ az $1, 2, \dots, n$ elemek egy ismétléses kombinációja lesz.

A többi képlet a C_n^k számokra vonatkozó korábbi képletekből adódik. $\square$

Ha $k=0$, akkor innen $\overline{C}_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$, ami megfelel annak, hogy n elemből 0 számú elemet egyféleképpen választhatunk ki: úgy, hogy egy elemet se veszünk.

Az n elem k -adosztályú ismétléses kombinációi számának más jelölése $\langle n \rangle_k$. Tehát

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad \overline{C}_n^k = \langle n \rangle_k = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!},$$

ahol a nevezők egyenlők, a számlálókban pedig mindkét esetben k egymásutáni szám szorzata áll n -től kezdve lefelé, illetve n -től kezdve felfelé.

6.4. Feladat. Hány olyan dominó van, amelyek mindkét felén a pontok száma 0-tól 8-ig terjed, lásd 4.7. Feladat.

Megoldás. A dominókat a pontok számának megfelelően xy -nal jelöljük, ahol $0 \leq x \leq y \leq 8$. A lehetőségek száma definíció szerint $\overline{C}_9^2 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

6.5. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, \dots, k\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Hány $f: A \rightarrow B$ növekvő függvény létezik?

Megoldás. Legyen $f(1) = a_1 \in B$, $f(2) = a_2 \in B, \dots, f(k) = a_k \in B$. Feltétel: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. A lehetőségek száma, tehát az $f: A \rightarrow B$ növekvő függvények száma minden $n, k \geq 1$ esetén éppen $\overline{C}_n^k$ (a definíció szerint).

Ennek alapján az $1, 2, \dots, n$ elemek k -adosztályú ismétléses kombinációi úgy is definiálhatók, mint az $f: A \rightarrow B$ növekvő függvények.

Szokásos a következő jelölés is: ha x valós szám és $k \geq 1$ természetes szám, akkor $[x]^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$. Így $\overline{C}_n^k = \frac{[n]^k}{k!} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}$.

7. A binomiális tétel

Az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ képletek általánosításaként igazoljuk, hogy

7.1. Tétel. Ha a, b tetszőleges komplex számok és $n \geq 1$ egész szám, akkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bizonyítás. Itt $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{-szer}}$. A szorzások elvégzése érdekében az n zárójel mind-

egyikéből vagy az a -t vagy a b -t kell választani, ezeket össze kell szorozni, majd a kapott szorzatokat össze kell adni. Így egy olyan összeget kapunk, amelynek minden tagja $a^{n-k}b^k$ alakú, ahol $0 \leq k \leq n$. Ez a tag annyszor szerepel, ahányszor az n számú b közül k számú b -t választunk és ez éppen $C_n^k = \binom{n}{k}$. $\square$

Kiírva a tagokat $(a+b)^n$ következő kifejtését kapjuk:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$

Figyeljük meg, hogy a kifejtésben $n+1$ tag van, az a kitevői n -től 0-ig csökkennek, a b kitevői pedig 0-tól n -ig növekednek. Az együttthatók a binomiális együttthatók (a „binom” görög eredetű szó, jelentése „két tag”, ez az $a+b$ kéttagú összegre vonatkozik).

7.2. Tétel. Ha $n \geq 1$, akkor $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Bizonyítás. A binomiális tételben legyen $a = b = 1$, ill. $a = 1, b = -1$. $\square$

Ebben az elrendezésben minden belső szám egyenlő a szám felett álló két szám összegével. Ennek alapján a táblázat könnyen kiegészíthető további sorokkal.

Mivel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, A Pascal-háromszög soraiban a szélektől egyenlő távolságra álló számok egyenlőek.

7.4. Feladat. Adjuk meg a Pascal-háromszög következő három sorát.

7.5. Feladat. Adjuk meg $(a+b)^7$, $(a+b)^8$, $(x^2+1)^6$, $(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{y})^6$ kifejtéseit.

7.6. Feladat. Igazoljuk, hogy $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$, ahol $n \geq 1$.

Megoldás. $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$, a binomiális együtthatók összegére vonatkozó képlet szerint.

Másképp: Legyen $S(n) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = 1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + (n-1) \binom{n}{n-1} + n \binom{n}{n}$. A binomiális együtthatók szimmetria-tulajdonsága miatt $S(n) = n \binom{n}{0} + (n-1) \binom{n}{1} + \dots + 2 \binom{n}{n-2} + 1 \binom{n}{n-1}$. Összeadva: $2S(n) = n \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) = n \cdot 2^n$, ahonnan $S(n) = n \cdot 2^{n-1}$.

A binomiális képletnek érvényes a következő általánosítása, amelyet **általánosított binomiális képletnek** nevezünk:

$$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)}{k!} x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda}{k} x^k,$$

ahol $\lambda, x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ és $\binom{\lambda}{k} = \frac{\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, az **általánosított binomiális együtthatók**.

7.7. Feladat. Igazoljuk, hogy az általánosított binomiális együtthatókra is igaz a $\binom{\lambda}{k} = \binom{\lambda-1}{k} + \binom{\lambda-1}{k-1}$ addíciós képlet.

Megoldás. Közvetlen számolással.

7.8. Feladat. Adjuk meg az általánosított binomiális képletet $\lambda = -1$ esetén.

Megoldás. Ha $\lambda = -1$, akkor $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ és azt kapjuk, hogy:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$