

1. Permutációk**1.1. Feladat.** Hányféle sorrendje van az 1, 2, 3 számoknak?**Megoldás.** Hatféle sorrend van, ezek a következők:

123 132 213 231 312 321

1.2. Feladat. Hányféle sorrendje van az a, b, c, d betűknek?**Megoldás.** A sorrendek száma 24, ezek:

abcd abdc acbd acdb adbc adcb
 bacd badc bcad bcda bdac bdca
 cabd cadb cbad cbda cdab cdba
 dabc dacb dbac dbca dcab dcba

1.3. Definíció. Tekintsünk véges sok különböző elemet. Ezek különböző sorrendjeit az elemek **permutációinak** nevezzük. A permutációk képzését (felírását) az elemek **permutálásának** nevezzük. Ha adott n különböző elem, akkor jelölje P_n ezek összes **permutációinak számát**.

Az 1.1. Feladatban $P_3 = 6$, az 1.2. Feladatban pedig $P_4 = 24$. Kérdés: Mennyi P_n ?

Emlékeztetünk a következő fogalomra: A $k \geq 1$ természetes szám **faktoriálisa** $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$. Így pl. $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, Azonnali, hogy $(*)$ $k! = (k-1)! \cdot k$, ahol $k \geq 2$. Ha $(*)$ -ban $k = 1$, akkor kapjuk, hogy $1 = 0!$, ez indokolja, hogy megállapodás szerint $0! = 1$ legyen.

1.4. Tétel. Ha $n \geq 1$, akkor n különböző elem összes permutációinak száma $n!$, azaz $P_n = n!$.

Bizonyítás. Az első helyre az n elem közül bármelyiket írhatjuk, ez n lehetőség, a második helyre a megmaradt $n-1$ elem bármelyike kerülhet, ez $n-1$ lehetőség. Az első két elemet így $n(n-1)$ -féleképpen választhatjuk meg. Tovább, a harmadik elem a megmaradt $n-2$ elem bármelyike lehet, ez újabb $n-2$ lehetőség, ..., az utolsó, n -edik elem megválasztására $n - (n-1) = 1$ lehetőségünk van. Kapjuk, hogy $P_n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Másképp: n szerinti indukcióval. Ha $n = 1$, akkor $P_1 = 1$, ami igaz. Tegyük fel, hogy $P_{n-1} = (n-1)!$. Ha most n különböző elem permutációit képezzük, akkor az első helyre bármelyik elem kerülhet, a fennmaradó $n-1$ elemet pedig $P_{n-1} = (n-1)!$ -féleképpen permutálhatjuk. Így minden permutációt megkapunk és pontosan egyszer, tehát

$$P_n = \underbrace{P_n + P_n + \dots + P_n}_{n\text{-szer}} = nP_{n-1} = n(n-1)! = n!,$$

amit igazolnunk kellett. $\square$ Tehát $P_1 = 1! = 1$, $P_2 = 2! = 2$, $P_3 = 3! = 6$, $P_4 = 4! = 24$, $P_5 = 5! = 120$, $P_6 = 6! = 720, \dots$

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ különböző elemek permutációit úgy is definiálhatjuk, mint az adott $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemekből alkotott $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ olyan rendezett elem n -eseket (n komponensű vektorokat), amelyekben $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ páronként különbözőek. Ennél pontosabb definíció a következő:

1.5. Definíció. Permutációknak nevezzük egy véges halmaz önmagára való bijekcióit (bijektív leképezéseit). Részletesebben: ha A egy véges, n elemű halmaz ($n \geq 1$), akkor A permutációi az $f : A \rightarrow A$ bijektív függvények. Ha $A = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor tehát A permutációi az $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijektív függvények. Ezeket **n -edfokú permutációknak** nevezzük és így jelöljük:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

2. Ismétléses permutációk**2.1. Feladat.** Hányféle különböző sorrendje van a MATEMATIKA szó betűinek?

Megoldás. Különböztetjük meg a két M betűt, a három A betűt és a két T betűt, pl. úgy, hogy más színrel jelöljük őket: **MATEMATIKA**. Akkor 10 különböző elem permutációiról van szó és ezek száma $P_{10} = 10!$. De a három A betű egymás közötti permutálása, ezek száma $3! = 6$, valójában nem változtat a

sorrenden (ismét azonos színnel írjuk őket). Hasonlóan az A és T betűkre vonatkozóan. A lehetséges sorrendek száma:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151\,200.$$

2.2. Definíció. Az olyan elemek különböző sorrendjeit, amelyek között egyenlők is vannak **ismétléses permutációknak** nevezzük. Ha n elem közül k_1 elem egymással egyenlő (azonos), további k_2 elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző, ..., további k_r elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző, ahol $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, akkor ezek különböző sorrendjeit az n elem $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ típusú ismétléses permutációinak nevezzük és ezek számát így jelöljük: $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$.

A 2.1. Feladatban $P_{10}^{(2,3,2,1,1,1)} = 151\,200$. Kérdés: Mennyi $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$?

2.3. Tétel. Ha $n \geq 1$, $k_1, k_2, \dots, k_r \geq 1$, ahol $r \geq 1$, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, akkor

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges, rögzített ismétléses permutációt. Ha az ebben szereplő k_1 számú egymással egyenlő elemet permutáljuk, akkor nem kapunk új ismétléses permutációt. Ugyanakkor, megkülönböztetve ezeket az elemeket (pl. úgy, hogy más-más színnel jelöljük őket), ezeket $k_1!$ -féleképpen permutálhatjuk. Így a rögzített ismétléses permutációból $k_1!$ számú olyan ismétléses permutációt kapunk, amelyre az n elem közül az első k_1 elem különböző, a további k_2 elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző, ..., további k_r elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző. Most megkülönböztetve a k_2 számú azonos elemet, ezeket $k_2!$ -féleképpen permutálhatjuk. Így a rögzített ismétléses permutációból $k_1!k_2!$ számú olyan ismétléses permutációt kapunk, amelyre az n elem közül az első k_1 elem különböző, a következő k_2 elem egymástól és az előbbiektől különböző, a soron következő k_3 elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző, ..., további k_r elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző. Ugyanígy folytatva végül n különböző elem $k_1!k_2! \dots k_r!$ különböző permutációjához jutunk. Így a $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$ számú ismétléses permutációból $k_1!k_2! \dots k_r! P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$ számú ismétlés nélküli permutációhoz jutunk. Ezek a permutációk mind különbözőek és minden permutációt megkapunk, ezért $P_n = k_1!k_2! \dots k_r! P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$, azaz $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)} = n! / (k_1!k_2! \dots k_r!)$. $\square$

A $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$ számokat polinomiális számoknak vagy polinomiális együtthatóknak is nevezzük, mert ezek a polinomiális tételben szereplő együtthatók, lásd később. Más jelölés: $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_r}{k_1, k_2, \dots, k_r}$. Figyeljük meg, hogy $P_n^{(1, 1, \dots, 1)} = P_n$, $P_n^{(k, 1, 1, \dots, 1)} = \frac{n!}{k!} = \frac{P_n}{P_k}$.

2.4. Feladat. Hányféle különböző sorrendje van n olyan elemnek, amelyek közül k számú egyenlő és a többi $n - k$ is egyenlő, de az előbbiektől különböző?

Megoldás. $P_n^{(k, n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

3. Variációk

3.1. Feladat. Az 1, 2, 3, 4 számok közül válasszunk ki kettőt és írjuk fel ezeket az összes lehetséges sorrendben. Mennyi a lehetőségek száma?

Megoldás. A következőket kapjuk:

12 13 14 21 23 24 31 32 34 41 42 43

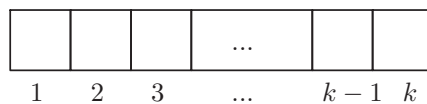
A lehetőségek száma 12.

3.2. Definíció. Legyen adott n különböző elem ($n \geq 1$). Válasszunk ki közülük k elemet, ahol $1 \leq k \leq n$ és írjuk fel ezeket az összes lehetséges sorrendben. Ezeket a sorrendeket az n elem **k -adosztályú variációinak** nevezzük. Jelölje V_n^k az n elem k -adosztályú variációinak a számát.

A 3.1. Feladatban $V_4^2 = 12$. Kérdés: Mennyi V_n^k ?

3.3. Tétel. Ha $1 \leq k \leq n$, akkor $V_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$.

Bizonyítás. A variációk képzését tekinthetjük úgy, hogy adott n elem (pl. az 1, 2, ..., n számok) és adott k hely (cella), ahová a kiválasztott elemeket az összes lehetséges sorrendben beírjuk, lásd 1. ábra.



1. ábra

Ezek után az 1.4. Tétel első bizonyításához hasonlóan: Az első helyre (cellába) az n elem közül bármelyiket írhatjuk, ez n lehetőség, a második helyre a megmaradt $n-1$ elem bármelyike kerülhet, ez $n-1$ lehetőség, tovább, a harmadik elem a megmaradt $n-2$ elem bármelyike lehet, ez újabb $n-2$ lehetőség, Most a k -adik cellánál meg kell állnunk, az ide kerülő elem megválasztására $n-(k-1) = n-k+1$ lehetőségünk van. Kapjuk, hogy $V_n^k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$. $\square$

A fenti képlet jobb oldalán a tényezők száma k . Ez a képlet így is írható:

$$V_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

tehát $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Ha $k=0$, akkor innen $V_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$, ami megfelel annak, hogy n elemből 0 számú elemet egyféleképpen választhatunk ki és permutálhatunk: úgy, hogy egy elemet se veszünk.

Figyeljük meg, hogy $V_n^1 = n$, $V_n^n = P_n = n!$. Ha $k > n$, akkor nem lehet variációkat képezni, ezért $k > n$ esetén célszerű használni, hogy $V_n^k = 0$.

A variációk pontosabb definíciója a következő:

3.4. Definíció. Variációknak nevezzük egy véges halmaznak egy másik véges halmazba való injektív leképezéseit. Részletesebben: ha A egy k elemű halmaz, B pedig egy n elemű halmaz ($n, k \geq 1$), akkor az $f: A \rightarrow B$ injektív függvényeket n elem k -adosztályú (ismétlés nélküli) variációinak nevezzük.

Ha $k > n$, akkor nincs ilyen injektív függvény, ha pedig $k \leq n$, akkor az ilyen injektív függvények száma V_n^k .

Szokásos a következő jelölés: ha x valós szám és $k \geq 1$ természetes szám, akkor $[x]_k = x(x-1)(x-2) \cdots (x-k+1)$. Így $1 \leq k \leq n$ esetén $V_n^k = [n]_k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$.

4. Ismétléses variációk

4.1. Feladat. Az 1, 2, 3, 4 számok közül válasszunk ki kettőt úgy, hogy ugyanazt az elemet kétszer is vehetjük és írjuk fel ezeket az összes lehetséges sorrendben. Mennyi a lehetőségek száma?

Megoldás. A következőket kapjuk:

11 12 13 14 21 22 23 24 31 32 33 34 41 42 43 44

A lehetőségek száma 16.

4.2. Definíció. Legyen adott n különböző elem ($n \geq 1$). Válasszunk ki közülük k elemet, ahol $k \geq 1$ úgy, hogy ugyanazt az elemet többször is vehetjük és írjuk fel ezeket az összes lehetséges sorrendben. Ezeket a sorrendeket az n elem k -adosztályú **ismétléses variációinak** nevezzük. Jelölje $\bar{V}_n^k$ az n elem k -adosztályú ismétléses variációinak a számát.

A 4.1. Feladatban $\bar{V}_4^2 = 16$. Kérdés: Mennyi $\bar{V}_n^k$?

4.3. Tétel. Ha $n, k \geq 1$, akkor $\bar{V}_n^k = n^k$.

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint a 3.3. Tétel bizonyításában, de most a k számú cella mindegyikébe bármelyik elemet írhatjuk az n közül. Kapjuk, hogy $\bar{V}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k\text{-szor}} = n^k$. $\square$

Az ismétléses variációk a következőképpen is definiálhatók:

4.4. Definíció. Ismétléses variációknak nevezzük egy véges halmaznak egy másik véges halmazba való leképezéseit. Részletesebben: ha A egy k elemű halmaz, B pedig egy n elemű halmaz ($n, k \geq 1$), akkor az $f: A \rightarrow B$ függvényeket n elem k -adosztályú ismétléses variációinak nevezzük.

Ha $n, k \geq 1$, akkor az $f: A \rightarrow B$ függvények száma n^k .

Figyelem! Az „ismétléses” jelzőnek más jelentése van a permutációknál és más a variációknál. Az ismétléses permutációknál ez arra vonatkozik, hogy a permutálandó elemek között *ismétlődők* (azonosak) vannak. Itt pontosan meg van adva, hogy az *ismétlődő* elemek a permutációkban hányszor fordulhatnak elő.

Az ismétléses variációk esetén n különböző elemből kell a variációkat képezni úgy, hogy mindegyik elemet *akárhányszor* felhasználhatjuk.

Figyeljük meg azt is, hogy a permutációk a variációknak egy speciális esete (ha $k = n$), ugyanakkor az ismétléses permutációk nem speciális esetei az ismétléses variációknak.

Az ismétléses variáció fogalma általánosítható:

4.5. Feladat. Adott n doboz, bennük rendre $k_1, k_2, \dots, k_n$ darab páronként különböző tárgy. Mindegyik dobozból kiválasztunk egy tárgyat. Hányféle kiválasztás lehetséges a rögzített sorrend mellett?

Megoldás. A lehetőségek száma $k_1 k_2 \cdots k_n$. Az első dobozból ugyanis k_1 -féle tárgyat választhatunk. Bármelyik tárgyat is választottuk, a második dobozból való húzásnál a választást k_2 -féleképpen folytathatjuk, így az első két tárgy kiválasztására $k_1 k_2$ lehetőségünk van. Ez a harmadik dobozból való húzással k_3 -féleképpen folytatható, és így tovább.

Ezt a számítási módszert, amely a „lehetőségek száma = részlehetőségek számainak szorzata” elven alapszik és amelyet a fentiekben már többször használtunk, **szorzási szabálynak** nevezzük.

4.6. Feladat. Hány pozitív osztója van az $48\,600 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ számnak?

Megoldás. $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$. Ugyanis az adott szám bármely pozitív osztója $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ alakú, ahol $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 5$, $0 \leq c \leq 2$. Az a kitevő megválasztására tehát 4 lehetőség van, b -re 6, c -re 3.

Általánosítás: Adott az $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ szám, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ páronként különböző prímszámok. Akkor n pozitív osztóinak száma $\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$.

Kombinatorikai feladatokban más esetekben a lehetőségek számát nem szorzással, hanem összeadással kapjuk a következő **összeadási szabály** szerint: „összes lehetőségek száma = az egymást kizáró eseteknek megfelelő lehetőségek számainak összege”. Gyakran együtt kell alkalmaznunk a szorzási szabályt és az összeadási szabályt.

4.7. Feladat. Tekintsük azokat a dominókat, amelyek mindkét felén a pontok száma 0-tól 8-ig terjed. Ezeket a pontok számának megfelelően így azonosíthatjuk: xy , ahol $0 \leq x \leq y \leq 8$.

a) Hány ilyen dominó van?

b) Hányféleképpen lehet a 45 ilyen dominó közül kettőt kiválasztani úgy, hogy a két dominót egymás mellé lehessen tenni (azaz valamelyik felükön a pontok száma azonos)?

Megoldás. a) Ha $x = 0$, akkor y értékei $0, 1, 2, \dots, 8$ lehetnek, ez 9 lehetőség. Ha $x = 1$, akkor y értékei $1, 2, \dots, 8$ lehetnek, ez 8 lehetőség, és így tovább, ha $x = 8$, akkor csak $y = 8$ lehet, ez 1 lehetőség. Az összeadási szabály szerint a dominók száma $9 + 8 + \dots + 1 = 45$.

b) Válasszunk egy dominót. Ez lehet 1. eset: „dupla” dominó, azaz $00, 11, 22, \dots, 88$, ezek száma 9, vagy 2. eset: olyan dominó, amelyre $x < y$, ezek száma 36.

Az 1. esetben a második dominót 8-féleképpen választhatjuk, pl. 22 esetén vehetjük a 02, 12, 23, 24, 25, 26, 27, 28 jelzésűeket.

A 2. esetben $8 + 8 = 16$ -féle párt választhatunk, pl. 27 lehetséges párijai: 02, 07, 12, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 37, 47, 57, 67, 77, 78.

A szorzási szabály szerint az 1. esetben $9 \cdot 8 = 72$, a 2. esetben pedig $36 \cdot 16 = 576$ a lehetőségek száma. Az összeadási szabály szerint az összes lehetőségek száma $72 + 576 = 648$.

Az előbbieken különbséget tettünk aszerint, hogy a két dominót milyen sorrendben húzzuk. Minden összeálló dominó-pár kétszer is szerepel, pl. 35 és 52 majd 52 és 35. Ha ezeket nem tekintjük különbözőeknek, akkor a lehetőségek száma az előbbi fele, azaz 324.