

Ez az utolsó két előadás vázlata, részletesebben lásd pl. a következő könyvekben:

- Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin, Diszkrét matematika, Typotex, Budapest, 2006,
- Hetyei Gábor, Kombinatorika és gráfelmélet, Janus Pannonius Tudományegyetem Pécs, 1996.

21. Multigráfok, gráfok bejárása

Ebben a szakaszban olyan (irányítás nélküli) gráfokat is vizsgálunk, amelyeknek többszörös élek és hurokélek is lehetnek. Ezeket **multigráfoknak** is nevezzük. Definíciójuk a következő:

21.1. Definíció. Legyenek V és E tetszőleges nemüres halmazok, $\varphi : E \rightarrow \{\{x\}, \{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$ pedig egy tetszőleges függvény. A $G = (V, E, \varphi)$ rendszert (irányítás nélküli) **gráfnak**, vagy **multigráfnak** nevezzük, ahol V elemei a gráf pontjai, E elemei a gráf élei. Ha egy $e \in E$ élre $\varphi(e) = \{x, y\}$, ahol $x \neq y$, akkor x és y az e él **végpontjai**. Ha $\varphi(e) = \{x\}$, akkor az e él **huroké**l.

21.2. Feladat. Legyen például $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ és $\varphi(e_1) = \{1, 2\}$, $\varphi(e_2) = \{1, 3\}$, $\varphi(e_3) = \{1, 3\}$, $\varphi(e_4) = \{3\}$, $\varphi(e_5) = \{4, 5\}$, $\varphi(e_6) = \{4, 5\}$, $\varphi(e_7) = \{4\}$, $\varphi(e_8) = \{3, 5\}$.

Rajzoljuk meg ezt a gráfot.

A séta, út és kör fogalmát hasonlóképpen definiáljuk, mint az egyszerű gráfok esetén.

21.3. Definíció. Legyen G egy (multi)gráf. Egy olyan sétát, amely G minden élét tartalmazza (pontosan egyszer) **Euler-sétának** vagy **Euler-vonalnak** nevezzük. Ez **zárt Euler-séta**, ha végpontjai azonosak, ellenkező esetben **nyitott Euler-séta**.

A G gráf **Hamilton-köre** egy olyan kör, amely G minden pontján áthalad.

A Königsbergi-hidak problémája (17. szakasz) így is megfogalmazható: Van-e a 12. ábrán levő gráfban zárt Euler-séta?

21.4. Tétel. (Euler) Legyen G egy összefüggő gráf.

i) Ha G -ben kettőnél több páratlan fokú pont van, akkor G -ben nincs Euler-séta.

ii) Ha G -ben pontosan kettő páratlan fokú pont van, akkor G -ben létezik Euler-séta. Minden Euler-séta nyitott és végpontjai a páratlan fokú pontok.

iii) Ha G -ben nincs páratlan fokú pont, akkor G -ben létezik Euler-séta. Ekkor minden Euler-séta zárt.

Bizonyítás. iii) Tegyük fel, hogy G -ben minden pont foka páros. Algoritmust adunk a gráf bejására, amely egy zárt Euler-sétához vezet.

Induljunk el egy tetszőleges v_1 pontból egy tetszőleges élen és haladjunk ameddig csak lehet még be nem járt éleken. Számozzuk meg a bejárás sorrendjében a bejárt éleket. A felétel miatt csak v_1 -ben akadhatunk el. Ha nem jártuk be az összes élt, akkor van olyan be nem járt él, amely egy már érintett v_2 pontra illeszkedik. Induljunk el v_2 -ből be nem járt éleken haladva. Csak v_2 -ben akadhatunk el. Számozzuk újra a bejárt éleket úgy, hogy megtartsuk az előző számozást, amíg v_2 -be nem jutunk, majd a másodszor bejárt éleken folytatjuk a számozást a v_2 -ben való elakadásig, ezután pedig az először bejárt éleken folytatjuk a számozást v_2 -től kezdődően. Ezt az eljárást ismételve végül egy zárt Euler-sétát kapunk. $\square$

21.5. Feladat. Különböző gráfokra vizsgáljuk meg az előző Tétel alkalmazhatóságát. Alkalmazzuk az előbbi algoritmust.

21.6. Feladat. Nem szerepel az előbbi Tételben az az eset, amikor a G gráfnak pontosan egy páratlan fokú pontja van. Vajon miért?

Ezt a Tételt gyakran így adjuk meg:

21.7. Következmény. Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-séta, ha a gráf minden pontjának a foka páros.

A Hamilton-körök problémája hasonlít az Euler-sétákéra. Kérdés: Hogyan dönthető el, hogy egy gráfnak van-e Hamilton-köre?

Erre vonatkozóan nem ismerünk szükséges és elégséges feltételt. Egy elégséges feltételt ad a következő

21.8. Tétel. (Dirac Gábor) Ha egy n pontú ($n \geq 3$) egyszerű gráfban minden pont foka $\geq n/2$, akkor a gráfnak van Hamilton-köre.

22. Síkbeli gráfok

22.1. Definíció. Egy (véges) gráf **síkba rajzolható** vagy **síkbeli gráf**, ha megrajzolható úgy a síkban, hogy az élek ne messék egymást.

22.2. Feladat. Síkbeli gráf-e vajon a K_5 teljes gráf. És ha elhagyjuk egy élt?

22.3. Feladat. Igazoljuk, hogy minden véges gráf megrajzolható a térben úgy, hogy az élek ne messék egymást és minden él egy egyenes szakasz legyen.

Megoldás. Indukcióval. A következő pontot vegyük fel úgy, hogy ne legyen rajta semelyik korábbi három pont által meghatározott síkon.

Legyen G egy olyan véges, egyszerű, összefüggő gráf, amely megrajzolható a síkban. A G gráf a síkot tartományokra osztja, ezeket nevezzük „országoknak”. Minden ország korlátos, kivéve egyet, amely nem korlátos, ez körbeveszi a többi és ebben „kiálló” élek is lehetnek. Akkor

22.4. Tétel. (Euler-képlet) $\text{Országok száma} + \text{pontok száma} = \text{élek száma} + 2$.

Jelölje c a pontok számát, e az élek számát, ℓ pedig az országok számát. Akkor: $\ell + c = e + 2$.

Bizonyítás. ...

22.5. Tétel. A K_5 gráf nem rajzolható meg a síkban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy K_5 megrajzolható a síkban. Itt $c = 5$, $e = \binom{5}{2} = 10$ és az Euler-képlet szerint az országok száma $\ell = e + 2 - c = 7$. De minden országot legalább 3 él határol, így lennie kell legalább $\frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5$ élnek (2-vel osztottunk mert minden él két országot határol). Ellentmondásra jutottunk. $\square$

22.6. Tétel. Egy n pontú összefüggő síkba rajzolható gráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle lehet ($n \geq 3$).

Bizonyítás. ...

22.7. Tétel. A „három ház - három kút” problémának megfelelő $K_{3,3}$ gráf nem rajzolható meg a síkban.

Bizonyítás. ...

22.8. Definíció. Egy gráf **páros gráf**, ha pontjai két, A és B halmazba oszthatók úgy, hogy a gráf minden éle egy A -beli és egy B -beli pontot köt össze.

Az előbbi $K_{3,3}$ gráf ún. teljes páros gráf, itt $|A| = |B| = 3$ és a házak A halmazának minden pontját él köti össze a kutak B halmazának minden pontjával.

Az Euler-képlet poliéderekre:

22.9. Tétel. Minden konvex poliéderre: $\ell + c = e + 2$, ahol c a poliéder csúcsainak száma, e az élek száma, ℓ pedig a lapok száma (innen az ℓ jelölés).

Melyek azok a gráfok, amelyek megrajzolhatók a síkban?

22.10. Tétel. (Kuratowski) Egy gráf akkor és csak akkor rajzolható meg a síkban, ha nem tartalmaz részgráfként a K_5 teljes gráffal vagy a $K_{3,3}$ teljes páros gráffal topologikusan izomorf részgráfot.

Itt két (rész)gráf topologikusan izomorf, ha másodfokú pontok létesítése vagy törlése ismételt alkalmazásával egymásba átvihetők.

23. Gráfok színezése

- a gráfok pontjainak színezése úgy, hogy a szomszédos pontok különböző színűek legyenek:

23.1. Tétel. Legyen G egy gráf. Egyenértékűek a következő állítások:

1. G kiszínezhető 2 színnel,
2. G páros gráf,
3. G nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört.

23.2. Definíció. Ha egy G gráf kiszínezhető k színnel, $(k - 1)$ színnel azonban nem, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **kromatikus száma** k , jelölés: $\chi(G) = k$.

23.3. Tétel. Ha egy gráf minden pontjának a foka $\leq k$, akkor a gráf kiszínezhető $k + 1$ színnel.

Bizonyítás. Azonnali ...

23.4. Tétel. (Brooks) Legyen G egy összefüggő gráf, amely nem teljes gráf és nem egy páratlan hosszúságú kör. Ha G -ben minden pont foka $\leq k$, akkor a gráf k színnel kiszínezhető.

23.5. Tétel. (Négyszíntétel) Minden síkba rajzolható gráf kiszínezhető 4 színnel.

Másképp: Minden politikai térkép országai kiszínezhetők 4 színnel úgy, hogy a szomszédos országok különböző színűek legyenek.

- a gráfok éleinek színezése úgy, hogy a szomszédos élek (közös végponttal rendelkező élek) különböző színűek legyenek:

23.6. Definíció. Ha egy G gráf élei kiszínezhetők k színnel, $(k - 1)$ színnel azonban nem, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **él-kromatikus száma** k .

23.7. Tétel. (Gupta, Vizing, 1966) Ha egy egyszerű gráfban minden pont fokszáma $\leq k$, akkor a gráf él-kromatikus száma $\leq k + 1$.