

18.13. Definíció. Legyenek $e_1 = x_0x_1$, $e_2 = x_1x_2, \dots$, $e_k = x_{k-1}x_k$ egy G gráf egymáshoz csatlakozó különböző élei. Azt mondjuk, hogy $W = e_1e_2\dots e_k$ egy k hosszúságú **séta**, amelynek x_0 és x_k a végpontjai (angolul séta = walk).

A W **zárt séta (körséta)**, ha $x_0 = x_k$, ellenkező esetben W **nyitott séta**.

A W séta **nyitott út**, ha az $x_0, x_1, \dots, x_k$ pontok páronként különbözők.

A W séta **zárt út (körút)** vagy **kör**, ha az $x_0, x_1, \dots, x_k$ pontok páronként különbözők, kivéve $x_0 = x_k$ (ennek hossza $k \geq 3$).

Egy sétát tehát úgy kapunk, hogy kiindulunk egy pontból egy él mentén, beérkezünk egy másik pontba, onnan tovább haladunk egy másik él mentén, és így tovább, míg eljutunk a séta másik végpontjába. A bejárt élek nem ismétlődhetnek. Ha az érintett pontok sem ismétlődnek, kivéve esetleg a végpontokat, akkor útról beszélünk.

Például a 20. ábrán levő 20 pontú gráfban $v_2 - v_7 - v_{12} - v_{11} - v_6 - v_7 - v_8$ egy nyitott séta. Pontosabban, megadva az éleket, $(v_2v_7)(v_7v_{12})(v_{12}v_{11})(v_{11}v_6)(v_6v_7)(v_7v_8)$ egy nyitott séta, amelynek hosszúsága 6, végpontjai v_2 és v_8 . Ez nem út, mert a séta a v_7 pontot kétszer is érinti.

A v_2 -ből induló és ide visszaérkező $v_2 - v_7 - v_{12} - v_{11} - v_6 - v_7 - v_8 - v_9 - v_4 - v_3 - v_2$, pontosabban $(v_2v_7)(v_7v_{12})(v_{12}v_{11})(v_{11}v_6)(v_6v_7)(v_7v_8)(v_8v_9)(v_9v_4)(v_4v_3)(v_3v_2)$ séta egy zárt séta, amelynek hosszúsága 10. Ez sem út.

A $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$ -nek megfelelő $(v_1v_2)(v_2v_3)(v_3v_4)(v_4v_5)$ séta egy 4 hosszúságú nyitott út.

A $v_2 - v_3 - v_4 - v_9 - v_8 - v_7 - v_2$ -nek megfelelő $(v_2v_3)(v_3v_4)(v_4v_9)(v_9v_8)(v_8v_7)(v_7v_2)$ egy 6 hosszúságú zárt út, azaz kör.

18.14. Feladat. i) Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van egy kör.

ii) Mit lehet mondani a gráfról, ha minden pont foka 2?

Megoldás. i) Induljunk ki a gráf egy tetszőleges pontjából és haladjunk az éleken. Minden pont foka ≥ 2 , ezért bármely új pontba jutva tovább mehetünk még be nem járt élen (így egy sétát kapunk). Csak akkor akadhatunk el, ha olyan pontba jutunk, amelyet korábban már érintettünk. De akkor bejártunk a gráfban egy kört.

18.15. Tétel. Legyen G egy n pontú gráf. Ha G -nek van legalább n éle, akkor G -ben van kör.

Bizonyítás. Ha $n = 1$ vagy $n = 2$, akkor a feltétel nem teljesülhet. Ha $n = 3$, akkor a gráfot 3 pont és 3 él alkotja, ez egy háromszög, és az állítás igaz. n -szerinti indukcióval tegyük fel, hogy a tulajdonság igaz minden $n - 1$ pontú gráfra. Legyen G egy olyan n pontú gráf, amelynek van legalább n éle. Tekintsünk a G -beli utak közül egy leghosszabbat (biztosan van ilyen).

Ha ez egy zárt út, akkor egy kör, és készen vagyunk.

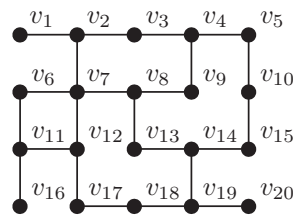
Ha ez nyitott út, akkor mindkét végpontja elsőfokú. Valóban, ha nem így lenne, akkor az egyik végponthoz újabb él csatlakoztatásával egy hosszabb utat kapnánk, ami ellentmond annak, hogy a választott út hossza maximális. Töröljük az egyik végpontot a hozzá tartozó éllel együtt. Kapunk egy olyan $n - 1$ pontú gráfot, amelynek van legalább $n - 1$ éle. Az indukciós feltétel szerint ebben van kör, és ez G -nek is része. $\square$

18.16. Definíció. A G gráf **összefüggő**, ha bármely két u, v pontjára létezik olyan út G -ben (az út G -nek részgráfja), amelynek végpontjai u és v . Az egy pontból álló gráfot is összefüggőnek tekintjük.

A G maximális, összefüggő részgráfjait a G **összefüggő komponenseinek** nevezzük. Ugyanazon komponenshez tartoznak azok a pontok, amelyek között van G -beli út (amelyek élekkel összeköthetők).

Megjegyzés. Az, hogy a gráf két u, v pontjára létezik olyan út G -ben, amelynek végpontjai u és v egy reláció a gráf pontjainak V_G halmazán. Ha megengedjük a 0 hosszúságú utakat is, akkor belátható, hogy ez egy ekvivalenciareláció a V_G halmazon. Az így meghatározott ekvivalenciaosztályok lesznek a G összefüggő komponensei.

18.17. Feladat. Legyen G egy összefüggő gráf és ebben legyen C egy kör. Akkor a C kör bármely e élének törlésével kapott $G \setminus \{e\}$ gráf is összefüggő.



20. ábra

Megoldás. Legyen u, v a gráf két tetszőleges pontja. Ha az ezeket összekötő útban szerepel a törölt él, akkor vehetjük helyette a C körnek a törölt él elhagyásával kapott részét.

18.18. Feladat. Legyen G egy n pontú összefüggő gráf ($n \geq 2$). Igazoljuk, hogy ha az élek száma $< n$, akkor G -ben létezik legalább egy elsőfokú pont.

Megoldás. Jelölje G pontjait $P_1, P_2, \dots, P_n$. G összefüggő gráf, ezért nincs izolált pontja, azaz $d(P_i) \geq 1$ minden i -re. Ha nem lenne elsőfokú pont, akkor $d(P_i) \geq 2$ minden i -re, és így a 17.6. Tétel szerint az élek száma $|E| = (d(P_1) + d(P_2) + \dots + d(P_n))/2 \geq (2n)/2 = n$ lenne, ami ellentmondás.

18.19. Tétel. Bármely n pontú összefüggő gráfnak van legalább $n - 1$ éle ($n \geq 1$).

Megoldás. Ha $n = 1, 2, 3$, akkor ez igaz. n -szerinti indukcióval tegyük fel, hogy minden $n - 1$ pontú összefüggő gráfnak van legalább $n - 2$ éle. Legyen G egy n pontú összefüggő gráf. Azt kell belátnunk, hogy G -nek van legalább $n - 1$ éle. Tegyük fel, hogy ez nem így van. Akkor G -nek kevesebb, mint $n - 1$ éle van, és a 18.18. Feladat szerint van egy P elsőfokú pont. A P pontot a hozzá tartozó éllel együtt törölve egy $n - 1$ pontú összefüggő gráfot kapunk, amelynek az indukciós feltétel szerint van legalább $n - 2$ éle. A törölt éllel együtt akkor G -nek van legalább $n - 1$ éle, ami ellentmondás.

További feladatok:

18.20. Feladat. Legyen G egy tetszőleges (egyszerű) gráf. Akkor G vagy $\overline{G}$ összefüggő.

Megoldás. Ha G összefüggő, akkor kész. Tegyük fel, hogy G nem összefüggő. Akkor G -nek van legalább két összefüggő komponense. Igazoljuk, hogy ekkor $\overline{G}$ összefüggő.

Mi több, ekkor G két tetszőleges u és v különböző pontja között létezik egy 1 vagy 2 hosszúságú út $\overline{G}$ -ben. Valóban,

1. eset. Ha u, v a G különböző összefüggő komponenseiben van, akkor nem szomszédosak G -ben, de szomszédosak $\overline{G}$ -ben.

2. eset. Ha u, v a G ugyanazon összefüggő komponensében van, akkor legyen t egy pont egy másik komponensben, ahol u, t szomszédosak $\overline{G}$ -ben, v, t szomszédosak $\overline{G}$ -ben, tehát ut, tv egy 2 hosszúságú út $\overline{G}$ -ben.

18.21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú (egyszerű) gráfnak több, mint $\binom{n-1}{2}$ éle van, akkor a gráf összefüggő ($n \geq 1$).

18.22. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy $2n$ pontú (egyszerű) gráf minden pontjának foka legalább n , akkor a gráf összefüggő ($n \geq 1$).

Útmutatás. Ha a gráf nem összefüggő, akkor legalább két komponensre bomlik. Mennyi lehet a komponensekben a pontok, ill. az élek száma?

18.23. Feladat. Adott n weboldal. Tudjuk, hogy ha valamelyik w weboldallról van link egy másik w' oldalra, akkor w' -ről is van link w -re. Mutassuk meg, hogy ha az oldalak közül bármely kettő között van linkekkel történő (közvetett) kapcsolat, akkor a weboldalak között biztosan van $(n - 1)$ számú közvetlen link is.

A gráfok reprezentálására készített ábrák tetszetősek, a feladatok megoldása során gyakran ilyen ábrákat vázolva gondolkodunk, de ezek programozási célokra nem használhatók.

Egy lehetőség a gráfok számítógépes tárolására a következő. Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ egy G gráf pontjai, legyen $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ az az $n \times n$ -es mátrix, amelyre $a_{ij} = 1$, ha $x_i x_j \in E_G$ ($x_i x_j$ a gráf éle), és $a_{ij} = 0$ ellenkező esetben ($x_i x_j$ a gráfnak nem éle). Ezt a gráf **szomszédsági mátrixának** nevezzük, amely szimmetrikus (a főátlóra nézve) és a főátlóban nullák vannak. Pl. a 16. ábra első gráfjának szomszédsági mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Fagráfok

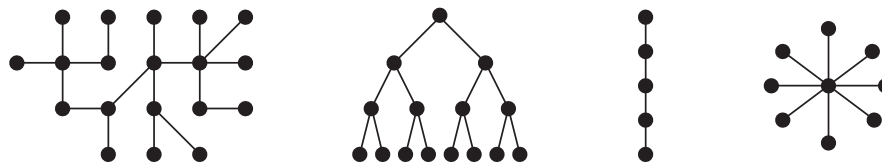
19.1. Definíció. Azokat az (egyszerű) gráfokat, amelyek összefüggőek és nem tartalmaznak kört **fagráfoknak**, röviden **fáknak** nevezzük.

19.2. Tétel. Egy G gráf akkor és csak akkor fa, ha bármely két különböző pontja között pontosan egy út vezet.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G egy fa. Akkor G összefüggő (definíció), ezért bármely két különböző pontja között van út. Több út nem lehet, mert akkor G -ben lenne kör, ami ellentmondás.

Fordítva, tegyük fel, hogy G -ben bármely két különböző pont között pontosan egy út vezet. Akkor G összefüggő (mert van út) és körmentes (mert csak egy út van), tehát G fa. $\square$

A 21. ábrán néhány fagráf látható, az utolsó egy csillag(gráf), az előtte levő egy út(gráf).



21. ábra

A fákat definiáló két tulajdonság azt vonja maga után, hogy a fának nem lehet túl kevés élük, hiszen összefüggők, de túl sok élük se lehet, mert körmentesek. Másképp: A fagráfok minimális összefüggő gráfok és maximális körmentes gráfok. Pontosabban:

19.3. Tétel. Legyen G egy egyszerű gráf. Akkor egyenértékűek a következő feltételek:

- 1) G fa(gráf),
- 2) G összefüggő, de ha bármely élt töröljük, akkor nem marad összefüggő,
- 3) G körmentes, de bármely új él hozzávétele esetén a keletkező gráf tartalmaz kört.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2) Tegyük fel, hogy G egy fa. Akkor G összefüggő (definíció). Tegyük fel, hogy egy xy élt törölve a kapott G' gráf összefüggő marad. Eszerint a G' gráfban van x -et és y -t összekötő P út. De akkor az xy élt visszatéve a P út és az xy él egy kört alkot, ami ellentmond a fa definíciójának.

2) $\Rightarrow$ 1) Tegyük fel, hogy teljesül a 2)-beli tulajdonság. Akkor G összefüggő és azt kell megmutatnunk, hogy G -ben nincs kör. Indirekt módon, tegyük fel, hogy G -ben van egy C kör. Akkor C -nek egy élt elhagyva a gráf összefüggő marad, lásd 18.17. Feladat, ami ellentmondás. $\square$

19.4. Feladat. Igazoljuk a 19.3. Tételben az 1) $\Rightarrow$ 3) és 3) $\Rightarrow$ 1) implikációkat.

19.5. Tétel. Ha G egy n pontú fa, akkor G -nek $(n - 1)$ éle van.

Bizonyítás. Ha G egy n pontú fa, akkor G összefüggő, ezért G -nek van legalább $(n - 1)$ éle, lásd 18.19. Tétel. Ugyanakkor G körmentes, ezért G -nek legfeljebb $(n - 1)$ éle van, lásd 18.15. Tétel. Következik, hogy G -nek pontosan $(n - 1)$ éle van. $\square$

19.6. Tétel. Bármely $n \geq 2$ pontú fának van legalább két elsőfokú pontja.

Bizonyítás. Induljunk ki a gráf egy tetszőleges pontjából és haladjunk az éleken úgy, hogy egy új pontba érkezve mindig még be nem járt élen megyünk tovább. Nem történhet meg, hogy olyan pontba érjünk, amelyet korábban már érintettünk, mert akkor bejártunk volna egy kört, ami lehetetlen. Csak akkor akadhatunk el, ha egy elsőfokú pontba jutunk (vesd össze a 18.14. Feladat megoldásával).

Ezzel igazoltuk, hogy létezik legalább egy elsőfokú pont. Hogyan mutatható meg, hogy biztosan van még egy elsőfokú pont? $\square$

Ha a tekintett fa egy út, akkor ennek pontosan két elsőfokú pontja van, a végpontjai.

19.7. Feladat. Rajzoljuk le az n pontú fákat, ahol $n = 1, 2, 3, 4$. Mennyi ezeknek a száma? Azonosítsuk az egymással izomorf fákat. Mennyi ezeknek a száma?

Kérdések: Hány n pontú fa létezik? Hány n pontú, egymással nem izomorf fa létezik?

Tekintsük pl. a 22. ábrán levő két 5 pontú fát. Ha e két fának ugyanolyan sorrendben megszámozzuk (megcímkézzük) a pontjait, pl. az 1, 2, 3, 4, 5 számokkal, akkor azt mondjuk, hogy ezek különböző **címkezett fák** (vagy számozott fák). Általában két n pontú címkezett fa akkor különböző, ha van olyan (i, j) számpár, hogy az egyik fában van ij él, a másikban pedig nincs.

Ha elhagyjuk a pontok számozását, akkor **címkezetlen fákról** (vagy számozatlan fákról) beszélünk. Két címkezetlen fa akkor különböző, ha nem izomorfak. A 22. ábrán levő két fa egymással izomorf, ezért címkezetlen fákként tekintve őket nem különböztetjük meg.



22. ábra

Ennek megfelelően az előbbi kérdések így is megfogalmazhatók:

Mennyi az n pontú címkezett fák száma? Mennyi az n pontú címkezetlen fák száma?

A 8. Táblázat az n pontú címkézett és címkézetlen fák számát tartalmazza.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
címkézett fák száma	1	1	3	16	125	1 296	16 807	262 144
címkézetlen fák száma	1	1	1	2	3	6	11	23

8. Táblázat. Az n pontú fagráfok száma

Megállapítható, hogy adott n -re az n pontú címkézetlen fák száma jóval kisebb a címkézett fák számánál.

Jelölje x_n az n pontú címkézett fák számát A 8. Táblázat szerint $x_2 = 1 = 2^{2-2}$, $x_3 = 3 = 3^{3-2}$, $x_4 = 16 = 4^{4-2}$, $x_5 = 125 = 5^{5-3}$. Innen már megsejthető a következő, Cayley-tételként ismert eredmény: $x_n = n^{n-2}$ minden $n \geq 1$ -re (ez $n = 1$ -re is igaz). Ez egy meglepően egyszerű képlet, amelyet bizonyítani fogunk, a bizonyítás viszont nem olyan egyszerű.

19.8. Feladat. Hány n pontú címkézett csillag létezik? Hány n pontú címkézett út létezik?

Megoldás. A válasz: n , illetve $n!/2$. Miért épp ennyi?

Az n pontú címkézetlen (tehát nemizomorf) fák T_n számára nincs hasonló egyszerű képlet, csak becslések adhatók Mivel egy n pontú címkézetlen fa legfeljebb $n!$ -féleképpen címkézhető meg, azonnal következik, hogy $T_n \geq x_n/n! = n^{n-2}/n!$ minden $n \geq 1$ -re. Az is igazolható, hogy $T_n \leq 4^{n-1}$ minden $n \geq 1$ -re.

A 23. ábrán a 6 pontú címkézetlen fák láthatók, ezek száma $T_6 = 6$.



23. ábra