

A MATEMATIKAI LOGIKA ALAPJAI

Dr. Tóth László

Pécsi Tudományegyetem, 2005

BEVEZETÉS

A **logika** a gondolkodás általános törvényszerűségeit, szabályait vizsgálja. A **matematikai logika** a matematikában használt gondolkodási formák és következtetések formális szabályaival foglalkozik. Feltárja az állítások szerkezetét, elvonatkoztatva azok tartalmi jelentésétől, és feladata a helyes következtetési szabályok megállapítása.

A matematikai logika ezáltal a matematika, az informatika és más tudományágak megalapozását is szolgálja. Hozzájárul a helyes gondolkodásmód kialakításához és a nyelvi kifejezések helyes használatához.

A matematikai logika módszere eltér a hagyományos logika módszerétől. A szimbólumok használata mellett - emiatt a matematikai logikát sokáig szimbolikus logikának is nevezték - lényeges az absztrakció, a matematikai módszerek, a halmaz, a reláció és a függvény fogalmainak a használata.

Már Arisztotelész (K.e. 384-322), ókori görög filozófus megfogalmazott néhány fontos logikai alapelveket. A matematikai logika G. W. Leibniz (1646-1716) német matematikus és filozófus munkásságának nyomán indult fejlődésnek. Ő egy olyan általános módszert keresett, amely lehetővé teszi az új ismeretek felfedezését és a világ megismerését. Célja az volt, hogy mindent szimbólumokkal fejezzen ki, a közöttük lévő kapcsolatokat pedig a logika törvényei szolgáltassák.

Leibniz nyomán főképp az algebra területén indultak meg a kutatások, majd a geometriai axiómarendszerek ellentmondásmentességének kérdése és a halmazelméleti ellentmondások problémája ösztönözte a matematikai logika fejlődését. Később az aritmetika és a formális nyelvek megalapozása, valamint az informatikai alkalmazások céljából folytak és folynak jelenleg is intenzív kutatások. Jelentős eredményeket értek el G. Boole (1815-1864, angol), A. de Morgan (1806-1873, angol), G. Peano (1858-1932, olasz), B. Russel (1872-1970, angol) és mások.

Ebben a jegyzetben bemutatjuk a matematikai logika, ezen belül a kijelentéslogika és a predikátumlogika alapvető fogalmait, továbbá kitekintést adunk a magasabbrendű nyelvekre és a logikának algebrai struktúrákkal (hálók, algebrák) való kapcsolatára vonatkozóan.

1. LOGIKAI ALAPFOGALMAK

1.1. Kijelentések. A **kijelentés** (ítélet vagy állítás) olyan jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondat, amely vagy igaz, vagy hamis, de nem lehet egyidőben igaz is és hamis is. Jelölés: $p, q, r, \dots, x, y, z, \dots$, ezeket **kijelentésváltozók**nak nevezzük. Például,

p : "A 17 prímszám." igaz kijelentés,

q : "14 osztható 4-gyel." hamis kijelentés,

r : "Minden 2-nél nagyobb páros szám két prímszám összege." kijelentés, amelyről jelenlegi ismereteink alapján nem tudjuk eldönteni, hogy igaz vagy hamis (Goldbach-sejtés).

A "Szép idő van." mondat nem kijelentés, mert nem egyértelmű, hogy milyen földrajzi területre, milyen időintervallumra vonatkozik az állítás, stb., és emiatt nem állapítható meg, hogy igaz vagy hamis, illetve ennek eldöntéséhez további információkra lenne szükség.

Nem kijelentések a kérdő és a felkiáltó mondatok és nem tekintjük kijelentéseknek a definíciókat sem. Például, az "Egy 2-vel osztható egész számot páros számnak nevezünk." mondat nem kijelentés, de "Minden páros szám osztható 2-vel." egy igaz kijelentés.

A "Most nem mondok igazat." mondat nem kijelentés, mert ellentmondásos, ha ugyanis ez igaz lenne, akkor nem mondanék igazat, tehát mégsem lenne igaz, ha pedig az állítás hamis lenne, akkor igazat mondanék, tehát az állítás igaz lenne.

Az "igaz" illetve "hamis" a kijelentés **logikai értéke** vagy **igazságértéke**, ezeket a továbbiakban 1 (vagy i), illetve 0 (vagy h) jelöli. Ha p egy adott kijelentés, akkor ennek logikai értékét $|p|$ jelöli, így a fenti kijelentésekre $|p| = 1, |q| = 0$.

Megjegyzések. a) A kijelentés és a kijelentés logikai értéke fenti megadása nem matematikai definíció.

b) Annak eldöntése, hogy egy kijelentő mondat kijelentés-e, és hogy ez esetben mi a logikai értéke, nem a logika feladata. Ez konkrét tapasztalattal, vagy valamely szaktudomány eredményeivel dönthető el, vagy bizonyos esetekben megállapodás kérdése.

c) Már az ókorban Arisztotelész görög filozófus, a logika atyja, megfogalmazta a következő törvényeket:

- Az ellentmondástalanság törvénye: egy kijelentés logikai értéke nem lehet egyidejűleg igaz is és hamis is.

- A kizárt harmadik törvénye: egy kijelentés logikai értéke vagy igaz vagy hamis, harmadik lehetőség nincs.

d) Léteznek az ún. többértékű logikák is, ezekkel mi nem foglalkozunk.

1.2. Műveletek kijelentésekkel. Kijelentésekből újabb, ún. **összetett kijelentéseket** képezhetünk az alábbi **logikai alpműveletek** segítségével. Ezek a következők:

1) **Negáció:** A p kijelentés negációja (tagadása) a "Nem p " kijelentés, jele $\neg p$ vagy $\bar{p}$, amely igaz, ha p hamis és hamis, ha p igaz.

Így $|\neg p| = 1 - |p|$. Táblázattal

p	$\neg p$
0	1
1	0

Például, a p : "A 17 prímszám." kijelentés negációja a $\neg p$: "Nem teljesül, hogy a 17 prímszám." kijelentés, mely így is mondható: $\neg p$: "A 17 nem prímszám." Ez hamis.

2) **Konjunkció** ("logikai és" művelet): A p, q kijelentések konjunkciója a " p és q " kijelentés, jele $p \wedge q$, mely akkor és csak akkor igaz, ha p, q közül mindkettő igaz.

A fenti p, q kijelentések konjunkciója a $p \wedge q$: "A 17 prímszám és 14 osztható 4-gyel." kijelentés, amely hamis.

Ez, akárcsak a negáció esetén, megfelel a köznapi használatnak. A köznyelvben az "és" kötőszó helyett állhat például "de", "noha", "bár", "viszont", stb. Ezek hangulatilag befolyásolják az összetett kijelentést, de logikai érték szempontjából nem. Például: "A 10 osztható 2-vel is, 5-tel is.", "A barátom jól vizsgázott, bár nem tanult.", stb.

3) **Diszjunkció** ("logikai vagy"): A p, q kijelentések diszjunkciója a " p vagy q " kijelentés, jele $p \vee q$, mely akkor és csak akkor igaz, ha p, q közül legalább az egyik igaz.

Például, a fenti p, q kijelentések diszjunkciója a $p \vee q$: "A 17 prímszám vagy 14 osztható 4-gyel." kijelentés, amely igaz.

Itt a "vagy" kötőszót nem kizáró értelemben használjuk, helyette ez is mondható: "a kettő közül legalább az egyik esetben". A köznyelvben gyakran a "kizáró vagy"-ot használjuk: "Éva ma este színházba vagy moziba megy". Van még az ún. "összeférhetetlen vagy", pl. "A gyorsvonat legközelebb Kecskeméten vagy Nagykőrösön áll meg.", lásd 6. fejezet.

4) **Implikáció**: A p, q kijelentések implikációja a " p implikálja q -t" vagy " p -ből következik q " kijelentés, jele $p \rightarrow q$, mely akkor és csak akkor hamis, ha p igaz és q hamis.

A $p \rightarrow q$ implikációt a következő alakok bármelyikével is lehet mondani: " q akkor, ha p ", " q , feltéve, hogy p ", " p elégséges feltétele q -nak".

Itt p az implikáció **előtagja**, q az implikáció **utótagja**.

Ez az értelmezés összhangban van a köznyelvi használattal: Egy hallgató a következőt ígéri társának:

"Ha az előadás pontosan fejeződik be, akkor 12-kor a Kossuth-téren leszek."

Igéretét csak abban az esetben nem tartja be, ha az előtag igaz, az utótag pedig hamis.

5) **Ekvivalencia**: A p, q kijelentések ekvivalenciája a " p ekvivalens q -val" vagy " p akkor és csak akkor, ha q " kijelentés, jele $\leftrightarrow$, mely igaz, ha p, q egyidejűleg igaz vagy hamis és hamis, ha p, q közül egyik igaz, a másik hamis, azaz ha $|p| = |q|$.

A $p \leftrightarrow q$ ekvivalenciát a következőképpen is lehet mondani: " q akkor és csak akkor, ha p ", vagy " p szükséges és elegendő feltétele q -nak".

A köznyelvben az ekvivalencia ritkán fordul elő, de gyakori a matematikában, például:

"Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével." (Pitágorász-tétel)

Táblázattal megadva a fenti definíciók a következők:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned} |p \vee q| &= |p| + |q| + |p| \cdot |q|, & |p \wedge q| &= |p| \cdot |q|, \\ |p \rightarrow q| &= 1 + |p| + |p| \cdot |q|, & |p \leftrightarrow q| &= 1 + |p| + |q|, \end{aligned}$$

ahol $+$ és $\cdot$ modulo 2 értendőek:

x	y	$x + y$	$x \cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Minden kijelentés felbontható olyan kijelentésekre, amelyek már nem tartalmazzák ezeket a műveleteket, s amelyeket **elemi kijelentések**nek nevezünk.

1.3. Műveleti tulajdonságok.

Tétel. Ha p, q, r tetszőleges kijelentések, akkor igazak a következők.

1) $|\neg\neg p| = |p|$ (a kettős tagadás elve),

A konjunkció és a diszjunkció tulajdonságai:

2) $|(p \wedge q) \wedge r| = |p \wedge (q \wedge r)|$, $|(p \vee q) \vee r| = |p \vee (q \vee r)|$ (asszociativitás),

3) $|p \wedge q| = |q \wedge p|$, $|p \vee q| = |q \vee p|$ (kommutativitás),

4) $|p \wedge (p \vee q)| = |p|$, $|p \vee (p \wedge q)| = |p|$ (abszorbcio),

5) $|p \wedge p| = |p|$, $|p \vee p| = |p|$ (idempotencia),

6) $|p \wedge (q \vee r)| = |(p \wedge q) \vee (p \wedge r)|$, $|p \vee (q \wedge r)| = |(p \vee q) \wedge (p \vee r)|$ (disztributivitás),

A konjunkció és a diszjunkció negációra vonatkozó tulajdonságai:

7) $|p \vee \neg p| = 1$, $|p \wedge \neg p| = 0$,

8) $|\neg(p \wedge q)| = |\neg p \vee \neg q|$, $|\neg(p \vee q)| = |\neg p \wedge \neg q|$ (de Morgan képletek),

Az implikációra és az ekvivalenciára vonatkozó tulajdonságok:

9) $|p \rightarrow q| = |\neg p \vee q|$,

10) $|p \leftrightarrow q| = |(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)|$.

Bizonyítás. Táblázatok segítségével bizonyítunk, például a 8) első összefüggését így:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

A táblázat negyedik és utolsó oszlopának azonossága mutatja az összefüggés érvényességét.

Másképp, algebrai műveletekkel, használva a fenti összefüggéseket: Például 9) így igazolható:

$$|\neg p \vee q| = |\neg p| + |q| + |\neg p| \cdot |q| = 1 - |p| + |q| + (1 - |p|) \cdot |q| =$$

$$= 1 - |p| + |q| + |q| - |p| \cdot |q| = 1 - |p| + 0 - |p| \cdot |q| = 1 + |p| + |p| \cdot |q| = |p \rightarrow q|,$$

mert $-|p| = |p|$, azaz $|p| + |p| = 0$ minden p -re (modulo 2).

Megjegyzés. A fenti Tétel tulajdonságait a $||$ jel elhagyásával is írhatjuk, pl. $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$ vagy $p \rightarrow q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$.

1.4. Predikátumok, műveletek predikátumokkal. Predikátumoknak nevezzük az olyan kijelentő mondatokat, amelyek egy vagy több változótól függenek és amelyek ezen változók minden megengedett rögzített értékeire egy kijelentést adnak.

A változók lehetnek számok vagy valamely halmaz elemei. A változók számától függően beszélünk egyváltozós, kétváltozós,..., n -változós predikátumokról. Jelölés:

$P(x)$, $P(x, y)$, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$,..., vagy Px , Pxy , $Px_1x_2\dots x_n$,... .

Például, $P(x, y, z) : "x + y = z"$ egy 3-változós predikátum, amelyben az x, y, z változók pl. valós számok. Itt $P(2, 1, 3) : "2 + 1 = 3"$ igaz kijelentés, $P(3, 1, 2) : "3 + 1 = 2"$ pedig hamis kijelentés. További példák:

$Q(x) : "x > 0"$ és $R(x) : "x \leq 0"$ egy-egy, a valós számok halmazán értelmezett 1-változós predikátum,

$S(x, y) : "x > y"$ egy, az egész számok halmazán értelmezett 2-változós predikátum.

Az n -változós predikátumokra vonatkozó alpműveletek a következőképpen adhatók meg:

$$\overline{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{P(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

$$(P \wedge Q)(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$(P \vee Q)(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$(P \rightarrow Q)(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Q(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$(P \leftrightarrow Q)(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ahol a jobb oldalon a kijelentésekre vonatkozó alpműveletek szerepelnek.

Például, a $Q(x) : "x > 0"$ és $R(x) : "x \leq 0"$ 1-változós predikátumok esetén

$(Q \wedge R)(x) : "x > 0 \wedge x \leq 0"$, ez minden valós x -re hamis,

$(Q \vee R)(x) : "x > 0 \vee x \leq 0"$, ez minden valós x -re igaz.

Ha P, Q egyváltozós predikátumok és minden megengedett x értékre $|P(x) \rightarrow Q(x)| = 1$, akkor azt mondjuk, hogy P -ből **következik** Q , vagy Q **következménye** P -nek, jelölés: $P(x) \Rightarrow Q(x)$ vagy $P \Rightarrow Q$.

Ha minden megengedett x értékre $|P(x) \leftrightarrow Q(x)| = 1$, akkor azt mondjuk, hogy P és Q **egyenértékűek**, vagy **ekvivalensek**, jelölés: $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ vagy $P \Leftrightarrow Q$.

Például, ha $P(x) : "x < 1"$ és $Q(x) : "x \leq 1"$ az $\mathbb{R}$ halmazon, akkor $P \Rightarrow Q$. Ha még $S(x) : "3x < 3"$, akkor $P \Leftrightarrow S$.

1.5. Logikai kvantorok. A "minden x -re" kifejezést **univerzális kvantornak** nevezzük, jele $\forall x$, olvasd még: "bármely x -re", "tetszőleges x -re".

Legyen $P(x)$ egy, az A halmazon értelmezett egyváltozós predikátum. A $\forall x P(x)$ egy kijelentés, amelynek logikai értéke:

$$|\forall x P(x)| = \begin{cases} 1, & \text{ha minden } a \in A \text{-ra } |P(a)| = 1, \\ 0, & \text{másképp, azaz ha van olyan } a \in A, \text{ amelyre } |P(a)| = 0. \end{cases}$$

Például, ha $P(x) : "x^2 \geq 0"$ az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett predikátum, akkor $\forall x P(x)$ igaz kijelentés. Ugyanakkor, ha a $Q(x) : "x^2 > 0"$ az $\mathbb{R}$ -en értelmezett predikátumot tekintjük, akkor $\forall x Q(x)$ hamis kijelentés, mert $x = 0$ -ra $Q(0) : "0^2 > 0"$ hamis kijelentés.

A "van olyan x , hogy" kifejezést **egzisztenciális kvantornak** nevezzük, jele $\exists x$, olvasd még: "létezik x úgy, hogy".

Ha $P(x)$ egy, az A halmazon értelmezett predikátum, akkor a $\exists x P(x)$ egy kijelentés, amelynek logikai értéke:

$$|\exists x P(x)| = \begin{cases} 0, & \text{ha minden } a \in A \text{-ra } |P(a)| = 0, \\ 1, & \text{másképp, azaz ha van olyan } a \in A, \text{ amelyre } |P(a)| = 1. \end{cases}$$

Például, ha $P(x) : "x^2 - 2 = 0"$ az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett predikátum, akkor $\exists x P(x)$ igaz kijelentés. Ugyanakkor, ha $Q(x) : "x^2 - 2 = 0"$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán

értelmezett predikátum, akkor $\exists xQ(x)$ hamis kijelentés, mert az $x^2 - 2 = 0$ egyenlet gyökei, a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$ nem egész számok.

A következőkben felsorolunk néhány, a bevezetett kvantorokra vonatkozó fontosabb tulajdonságot.

Tétel. Ha $P(x)$ és $Q(x)$ tetszőleges egyváltozós predikátumok, akkor

- 1) $|\neg(\exists xP(x))| = |\forall x\neg P(x)|$, $|\neg(\forall xP(x))| = |\exists x\neg P(x)|$,
- 2) $|\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)| = |\forall x(P(x) \wedge Q(x))|$,
- 3) $|\forall x(P(x) \vee Q(x))| = 1$,
- 4) $|\exists x(P(x) \wedge Q(x))| = 1$,
- 5) $|\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)| = |\exists x(P(x) \vee Q(x))|$.

Az 1) tulajdonság szerint a $\exists$ ($\forall$) kvantort úgy negáljuk, hogy helyette a $\forall$ ($\exists$) kvantort írjuk és negáljuk a predikátumot. Például, a

"Van olyan hallgató, aki vizsgázott." negációja "Nincs olyan hallgató, aki vizsgázott.", azaz "Minden hallgató nem vizsgázott." ("Egy hallgató sem vizsgázott.")

"Minden hallgató vizsgázott." negációja: "Nem minden hallgató vizsgázott.", azaz "Van olyan hallgató, aki nem vizsgázott."

Megjegyezzük, hogy a 3) tulajdonságra nézve nem igaz, hogy

$|\forall x(P(x) \vee Q(x))| = 1$, azaz nem teljesül, hogy $|\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)| = |\forall x(P(x) \vee Q(x))|$.

Valóban, legyenek $P(x) : "x > 0"$ és $Q(x) : "x \leq 0"$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán. Ekkor

$|\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)| = 0$ és $|\forall x(P(x) \vee Q(x))| = 1$.

Hasonlóképpen a 4) tulajdonságra. Szerkesszünk további ellenpéldákat.

1.6. Feladatok.

1. Kijelentések-e a következők? Ha igen, akkor mi a logikai értékük?

- a) A 91 prímszám.
- b) Ha egy egész szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal is.
- c) Holnap havazni fog.
- d) Figyelj jól!
- e) Mikor fedezték fel Amerikát?
- f) Az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke.

2. Írjunk példákat igaz, illetve hamis kijelentésekre.

3. Képezzük a következő kijelentések negációját, konjunkcióját és diszjunkcióját, majd állapítsuk meg ezek logikai értékét:

- 1) p : "Ma este tanulunk." q : "Ma este nem nézünk TV-t."
- 2) p : " $2 \times 2 = 5$." q : "27 osztható 9-cel."
- 3) p : "Olaszország fővárosa Nápoly." q : "Európában 19 ország van."

4. Igazoljuk a 1.3. szakasz Tételének állításait.

5. Igazoljuk, hogy az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív.

6. A $p \rightarrow q$ implikáció **megfordítása** a $q \rightarrow p$ implikáció, $p \rightarrow q$ **kontrapozíciója** pedig a $\neg q \rightarrow \neg p$ implikáció. Igazoljuk, hogy:

- a) az implikáció ekvivalens a kontrapozíciójával: $|p \rightarrow q| = |\neg q \rightarrow \neg p|$,
- b) az implikáció megfordítása ekvivalens a megfordítás kontrapozíciójával (a kontrapozíció megfordításával): $|q \rightarrow p| = |\neg p \rightarrow \neg q|$.

7. Készítsük el a következő formulák értéktáblázatát:

- a) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$,
- b) $(p \rightarrow q) \vee r$,
- c) $\neg(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \neg p)$.

8. Írjunk példákat predikátumokra.

9. Állapítsuk meg a következő kijelentések logikai értékét:

a) $\forall x \in \mathbb{R} P(x)$,

b) $\forall x \in \mathbb{Z} Q(x)$,

c) $\exists x \in \mathbb{R} P(x)$,

d) $\exists x \in \mathbb{Z} Q(x)$,

ahol $P(x) : "x^3 \geq 0"$, $Q(x) : "3x^2 + 2 \geq 3"$ és $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

2. HALMAZOK

2.1. Halmazok. A **halmaz** bizonyos jól meghatározott dolgok (tárgyak, fogalmak), a halmaz **elemeinek** az összessége. Azt, hogy az a elem **hozzátartozik** az A halmazhoz így jelöljük: $a \in A$ (a eleme A -nak); $b \notin A$ jelentése: b nem eleme A -nak.

Egy halmazt egyértelműen meghatároznak az elemei. Egy halmazt megadhatunk úgy, hogy felsoroljuk az elemeit, pl. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$ vagy úgy, hogy megadunk egy, a halmaz x elemeire jellemző $T(x)$ tulajdonságot: $A = \{x | T(x)\} = \{x : T(x)\}$, pl. $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ és } 0 \leq x \leq 3\}$.

A számhalmazokra az alábbi jelöléseket használjuk:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a természetes számok halmaza,

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ a nemnulla természetes számok halmaza,

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ az egész számok halmaza,

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ a racionális számok halmaza,

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

Az üres halmaz (egyetlen eleme sincs) jele: $\emptyset$. Az A és B halmazokat egyenlőknek nevezzük, ha ugyanazok az elemei, jel. $A = B$.

Az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak, ha A minden eleme B -nek is eleme, jel. $A \subseteq B$.

Jegyezzük meg, hogy $A = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a vizsgált halmazok részhalmazai egy U ún. **alaphalmaznak** (univerzumnak). Az előzők szerint az A és B halmazok egyenlők, ha $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, itt $P(x) : x \in A$ és $Q(x) : x \in B$ az U halmazon definiált predikátumok. Gyakran ezt így írjuk: $\forall x \in U (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha $x \in A \Rightarrow x \in B$, azaz $\forall x \in U (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

2.2. Műveletek halmazokkal. Az A és B halmazok **metszete** a közös elemek összessége: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ és } x \in B\}$. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B **diszjunkt** vagy **idegen halmazok**.

Az A és B halmazok **egyesítése** vagy **uniója** azoknak az elemeknek az összessége, amelyek hozzátartoznak legalább az egyik halmazhoz: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ vagy } x \in B\}$.

Az $A \setminus B$ **különbség**halmaz az A olyan elemeinek a halmaza, melyek nem tartoznak a B -hez: $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ és } x \notin B\}$.

Ha $A \subseteq E$, akkor $E \setminus A$ -t az A halmaz E -re vonatkozó **kiegészítő** vagy **komplementer halmazának** nevezzük, jelölés: $\complement_E(A)$. Ha E , neve **alaphalmaz**, rögzített, akkor a $\complement(A)$ vagy $\bar{A}$ jelöléseket is használjuk.

Az A és B halmazok **szimmetrikus különbsége** az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmaz.

Figyeljük meg, hogy a metszet műveletet a logikai "és" (konjunkció) művelettel értelmezzük, a halmazok unióját pedig a logikai "vagy" (diszjunkció) művelettel. Hasonló kapcsolat van a komplementer halmaz és a negáció, valamint a szimmetrikus különbség és a "kizáró vagy" között.

2.3. Műveleti tulajdonságok

Tétel. Ha A, B, C tetszőleges halmazok, akkor

- 1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asszociativitás),
- 2) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás),
- 3) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (abszorpció),
- 4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás),
- 5) $A \cup \complement_E(A) = E$, $A \cap \complement_E(A) = \emptyset$,

- 6) $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$, $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ (de Morgan képletek),
 7) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$,
 8) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = A$, $A \setminus B = A \cap \mathcal{C}(B)$.

Bizonyítás. Következnek a logikai műveletekre vonatkozó megfelelő állításokból. Például 6) első képlete így: $x \in \mathcal{C}(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}(A) \vee x \in \mathcal{C}(B) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$.

Másképp, belátjuk a kétirányú bennfoglalást. Igazoljuk például 3) második képletét: $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ igaz a definíció szerint és $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ is igaz, mert $A \cap B \subseteq A$.

Tétel. (A szimmetrikus különbség tulajdonságai) Ha A, B, C tetszőleges halmazok, akkor

- 1) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
- 2) $A \Delta B = B \Delta A$,
- 3) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$,
- 4) $A \Delta \emptyset = A$, $A \Delta A = \emptyset$
- 5) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Bizonyítás. 3) és 5) kivételével azonnaliak a definíciók alapján. Ez utóbbiakra még visszatérünk.

2.4. Descartes-szorzat, hatványhalmaz. Az A és B halmazok **Descartes-szorzatának** nevezzük az

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

halmazt. Itt (x, y) **rendezett elempárt** jelöl, ahol lényeges az elemek sorrendje: $(x, y) = (z, t)$ akkor és csak akkor, ha $x = z$ és $y = t$.

Ha A és B elemeinek a száma m , illetve n , akkor $A \times B$ elemeinek a száma mn .

Például, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ esetén $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

Általánosan, az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok **Descartes-szorzata** az

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\}$$

halmaz, ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ún. **rendezett elem n -es**. Ha $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, akkor jelölés: $A \times A \times \dots \times A = A^n$.

Például, $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ azonosítható a sík, illetve a tér pontjainak halmazával.

Az A halmaz részhalmazainak az összességét $\mathcal{P}(A)$ -val jelöljük: $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$, ez az A **hatványhalmaza**.

Ha A elemeinek a száma n , akkor a részhalmazok száma 2^n , azaz a hatványhalmaz 2^n elemből áll.

2.5. Predikátumok igazsághalmazai. Az 1.4. szakaszban már definiáltuk az n -változós predikátum fogalmát: az A halmazon értelmezett n -változós predikátum (vagy **logikai függvény**) az A halmaz $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemeire vonatkozó olyan $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nyílt kijelentő mondat, amelyre minden rögzített $a_1, a_2, \dots, a_n$ esetén $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ egy kijelentés.

A 0-változós predikátumok a kijelentésekkel azonosíthatók.

Ha $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy n -változós predikátum, akkor azoknak az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ rendezett elem n -eseknek a halmazát, amelyekre $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ igaz a predikátum **igazsághalmazának** nevezzük, jelölés: $\mathcal{I}(P)$. Minden predikátumot meghatározza az igazsághalmaza.

Például az $\mathbb{R}$ -en adott $P(x, y, z) : "x + y = z"$ 3-változós predikátum igazsághalmaza az összes $(a, b, a + b)$ alakú rendezett számhármass, ahol a, b valós számok: $\mathcal{I}(P) = \{(a, b, a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

A $Q(x) : "x > 0"$ és $R(x) : "x \leq 0"$ 1-változós predikátumok igazsághalmazai a $(0, \infty)$ és $(-\infty, 0]$ intervallumok: $\mathcal{I}(Q) = (0, \infty)$, $\mathcal{I}(R) = (-\infty, 0]$.

Ha P egy n -változós predikátum az A halmazon, akkor P igazsághalmazára $\mathcal{I}(P) \subseteq A^n$. Ha $\mathcal{I}(P) = A^n$, akkor azt mondjuk, hogy a P predikátum azonosan igaz, ha pedig $\mathcal{I}(P) = \emptyset$, akkor P azonosan hamis.

Az n -változós predikátumokra vonatkozó alaplóműveletek a következőképpen is definiálhatók:

- a) $\mathcal{I}(\bar{P}) = A^n \setminus \mathcal{I}(P)$,
- b) $\mathcal{I}(P \wedge Q) = \mathcal{I}(P) \cap \mathcal{I}(Q)$,
- c) $\mathcal{I}(P \vee Q) = \mathcal{I}(P) \cup \mathcal{I}(Q)$,
- d) $\mathcal{I}(P \rightarrow Q) = (A^n \setminus \mathcal{I}(P)) \cup \mathcal{I}(Q)$,
- d) $\mathcal{I}(P \leftrightarrow Q) = A^n \setminus (\mathcal{I}(P) \Delta \mathcal{I}(Q))$.

Megjegyezzük, hogy $P \Rightarrow Q$ akkor és csak akkor igaz, ha $\mathcal{I}(P) \subseteq \mathcal{I}(Q)$, továbbá $P \Leftrightarrow Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(Q)$.

2.6. Feladatok

1. Legyen $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{c, e\}$. Adjuk meg a következő halmazokat: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $A \Delta B$, $A \times C$. Készítsünk diagramot.
2. Ha $A = \{a, b, c, d\}$, $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, akkor mi lehet a B halmaz?
3. Hány részhalmaza van az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak? Általánosítás.
4. Milyen A és B halmazokra igaz, hogy $A \setminus B = B \setminus A$?
5. Igazoljuk a 2.3. szakasz 1. Tételének állításait.
6. Igaz-e, hogy
 - a) $A \cap (A \cup B) = A$,
 - b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$,
 - c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 tetszőleges A, B, C halmazokra?

Megoldás. c) Nem. Legyen pl. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ és $E = \{1, 2, 3\}$.

7. Igazoljuk, hogy $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ és vezessük le ennek használatával, hogy a Δ művelet asszociatív.
8. Határozzuk meg a következő halmaz elemeit:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 - (y + 1)^2 = 12\}$$

ahol $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

9. Határozzuk meg a következő halmaz elemeit:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 + 2y^2 = 5\}.$$

10. Határozzuk meg a következő halmaz elemeinek a számát:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 2x + 3y = 2000\},$$

ahol $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

11. Ha $A \cap C = \emptyset$, akkor igazoljuk, hogy $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
12. Igazoljuk, hogy ha $A \cap C = B \cap C$ és $A \cup C = B \cup C$, akkor $A = B$.

Megoldás. Az abszorpció és a disztributivitás szerint: $A = A \cap (A \cup C) = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) = B \cap (A \cup C) = B \cap (B \cup C)$.

13. Ha A, B, C, D halmazok, akkor:

- a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
- b) Az $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ állítás nem igaz általában.
- c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
- d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

3. RELÁCIÓK

3.1. Relációk, példák relációkra. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ adott halmazok. n -**változós reláció**nak vagy n -**áris reláció**nak nevezzük a $\rho = (A_1, A_2, \dots, A_n, R)$ rendszert, ahol R részhalmaza az $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ Descartes-szorzatnak.

Ha $n = 2$, akkor a **kétváltozós reláció** vagy **bináris reláció** fogalmát kapjuk: $\rho = (A_1, A_2, R)$, ahol $R \subseteq A_1 \times A_2$.

A továbbiakban csak bináris relációkkal foglalkozunk, ezeket röviden **reláció**knak nevezzük és így jelöljük: $\rho = (A, B, R)$, ahol $R \subseteq A \times B$. Az R halmazt a ρ reláció **grafikonjának** nevezzük és jelölés: $(a, b) \in R \Leftrightarrow a\rho b$, olvasd: a ρ relációban van b -vel. Ellenkező esetben (a nincs ρ relációban b -vel) a jelölés: $(a, b) \notin R \Leftrightarrow a \not\rho b$.

Azt mondjuk, hogy ρ **homogén reláció**, ha $A = B$; ρ az **üres reláció**, ha $R = \emptyset$; ρ az **univerzális reláció**, ha $R = A \times B$.

Az A halmazon értelmezett **diagonális reláció**nak nevezzük az $\text{frm}[o] - -_A = (A, A, \Delta_A)$, $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$ relációt (itt $a \text{frm}[o] - -_A b \Leftrightarrow a = b$).

A ρ relációt gyakran azonosítjuk R grafikonjával, így $A \times B$ az univerzális reláció, $\emptyset$ az üres reláció, Δ_A pedig a diagonális reláció.

Példák. 1) Legyen $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2\}$ és $\rho = (A, B, R)$, ahol $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$. Itt például $a\rho 1$, $a\rho 2$ és $c \not\rho 2$.

2) Egy sík háromszögeinek A halmazában a hasonlósági reláció grafikonja $A \times A$ -nak az a részhalmaza, mely az egymással hasonló háromszögpárokból áll.

3) Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán értelmezett oszthatósági reláció a következő homogén reláció: $\rho = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, R)$, ahol $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a|b\} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac\}$.

4) A predikátumokra definiált $P \Rightarrow Q$ és $P \Leftrightarrow Q$ kapcsolatok egy-egy relációt jelentenek.

5) Legyen A az európai országok halmaza, B pedig az ázsiai országok halmaza, és legyen $a \in A, b \in B$ esetén $a\rho b$ jelentése a következő: a "a" európai ország diplomáciai kapcsolatban van a "b" ázsiai országgal.

6) Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor csak egy $\rho = (A, B, R)$ reláció értelmezhető, s ez az üres reláció, melynek grafikonja $R = \emptyset$.

Figyeljük meg, hogy a 2-változós homogén reláció azonos az 2-változós predikátum fogalmával.

Azt mondjuk, hogy a $\rho = (A, B, R)$ reláció **részrelációja** a $\sigma = (A, B, S)$ relációnak, jelölés $\rho \subseteq \sigma$, ha $R \subseteq S$, azaz ha $\forall (a, b) \in A \times B : a\rho b \Rightarrow a\sigma b$.

3.2. Műveletek relációkkal. A relációkra a következő műveleteket értelmezzük: Tekintsük a $\rho = (A, B, R)$ és $\sigma = (A, B, S)$ relációkat.

A ρ és σ relációk **metszete** a $\rho \cap \sigma = (A, B, R \cap S)$ reláció, tehát $a(\rho \cap \sigma)b \Leftrightarrow a\rho b \wedge a\sigma b$.

A ρ és σ relációk **egyesítése** vagy **uniója** a $\rho \cup \sigma = (A, B, R \cup S)$ reláció, így $a(\rho \cup \sigma)b \Leftrightarrow a\rho b \vee a\sigma b$.

A ρ reláció **kiegészítő relációja** a $\mathbb{C}\rho = (A, B, \mathbb{C}R)$ reláció, ahol $\mathbb{C}R$ az R halmaznak az $A \times B$ -re vonatkozó kiegészítő halmaza. Így $a\mathbb{C}\rho b \Leftrightarrow a \not\rho b$.

A ρ reláció **inverz relációja** a $\rho^{-1} = (B, A, R^{-1})$ reláció, ahol $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$. Így $b\rho^{-1}a \Leftrightarrow a\rho b$.

Példák. A $\mathbb{Z}$ halmazon az $=$ részrelációja a $\leq$ relációnak és az $|$ oszthatósági reláció nem részrelációja a $\leq$ -nek, mert például $2|-6$ és $2 \not\leq -6$.

A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a $\leq$ és $\geq$ relációk metszete az $=$ reláció, az $=$ és a $<$ relációk egyesítése pedig a $\leq$ reláció.

$\mathbb{R}$ -ben a $<$ reláció kiegészítő relációja a $\geq$ reláció, és $<$ inverze a $>$ reláció.

Tétel. Ha $\rho = (A, B, R)$ és $\sigma = (A, B, S)$ két reláció, akkor igazak a következő összefüggések:

- 1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$, $(\mathbb{C}\rho)^{-1} = \mathbb{C}\rho^{-1}$,
- 2) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$, $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$,

3.3. Reláció metszetei.

Legyen $\rho = (A, B, R)$ egy reláció és $X \subseteq A$. A $\rho(X) = \{b \in B \mid \exists x \in X : x\rho b\}$ halmazt a ρ reláció X **részalmazra vonatkozó metszetének** nevezzük. Ha $X = \{x\}$ egy egyelemű halmaz, akkor jelölés: $\rho(\{x\}) = \rho\langle x \rangle = \{b \in B : x\rho b\}$.

A $\rho(A)$ metszetet a ρ reláció **második projekciójának** nevezzük és $pr_2(\rho)$ -val jelöljük. A $\rho^{-1}(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B : a\rho b\}$ metszet a ρ reláció **első projekciója**, jelölés: $pr_1(\rho)$.

Megjegyezzük, hogy $\rho(X), \rho\langle x \rangle, pr_2(\rho) \subseteq B$ és $pr_1(\rho) \subseteq A$.

Példa. A fenti első példában adott relációra $\rho(\{a, b\}) = \{1, 2\}$, $\rho(\{c, d\}) = \{1\}$, $\rho\langle a \rangle = \{1, 2\}$, $\rho\langle d \rangle = \emptyset$, $pr_2(\rho) = \{1, 2\}$, $pr_1(\rho) = \{a, b, c\}$.

3.4. Homogén relációk tulajdonságai. A továbbiakban néhány fontosabb típusú homogén relációt vizsgálunk.

Legyen $\rho = (A, A, R)$ egy homogén reláció. Azt mondjuk, hogy

a) ρ **reflexív**, ha minden $x \in A$ esetén $x\rho x$ ($\forall x \in A \Rightarrow x\rho x$), azaz "minden elem relációban van önmagával";

b) ρ **transzitiv**, ha minden $x, y, z \in A$, $x\rho y$ és $y\rho z$ esetén $x\rho z$ ($\forall x, y, z \in A : x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$), azaz "valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel és ez utóbbi elem relációban van egy harmadikkal, akkor az első is relációban van a harmadikkal";

c) ρ **szimmetrikus**, ha minden $x, y \in A$, $x\rho y$ esetén $y\rho x$ ($\forall x, y \in A : x\rho y \Rightarrow y\rho x$), azaz "valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel, akkor ez utóbbi elem is relációban van az első elemmel";

d) ρ **antiszimmetrikus**, ha minden $x, y \in A$, $x\rho y$ és $y\rho x$ esetén $x = y$ ($\forall x, y \in A : x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$), azaz "valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel és ha ez utóbbi elem is relációban van az elsővel, akkor a két elem egyenlő";

e) ρ **előrendezési reláció**, ha ρ reflexív és transzitiv. Ekkor (A, ρ) neve **előrendezett halmaz**;

f) ρ **ekvivalenciareláció**, ha ρ reflexív, transzitiv és szimmetrikus. Az A halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk összességét $\mathcal{E}(A)$ -val jelöljük;

g) ρ **rendezési reláció**, ha ρ reflexív, transzitiv és antiszimmetrikus. Ekkor (A, ρ) neve **rendezett halmaz**.

Megjegyzés. Igazolhatók a következő állítások:

- i) ρ reflexív $\Leftrightarrow 1_A \subseteq \rho$;
- ii) ρ szimmetrikus $\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$;
- iii) ρ antiszimmetrikus $\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A$;
- iv) ρ reflexív és antiszimmetrikus $\Rightarrow \rho \cap \rho^{-1} = 1_A$;
- v) ρ ekvivalenciareláció $\Leftrightarrow 1_A \subseteq \rho \wedge \rho = \rho^{-1}$;
- vi) ρ ekvivalenciareláció és rendezési reláció $\Leftrightarrow \rho = 1_A$.

Példák. 1) Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán az oszthatóság előrendezési reláció, nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus, mert például $3 \mid -3$ és $-3 \mid 3$, de $-3 \neq 3$.

2) A természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán az oszthatóság rendezési reláció és $(\mathbb{N}, \mid)$ rendezett halmaz.

3) A $\mathbb{Z}$ halmazon az $a \equiv b \pmod{6} \Leftrightarrow 6 \mid a - b \Leftrightarrow$ az a -nak és b -nek a 6-tal való osztási maradékai egyenlők, ún. kongruencia reláció ekvivalenciareláció.

4) Az $(A, A, A \times A)$ univerzális reláció ekvivalenciareláció.

3.5. Ekvivalenciarelációk és osztályozások

Ha ρ ekvivalenciareláció az A halmazon, akkor a $\rho\langle x \rangle = \{y \in A : x\rho y\}$ metszeteket, ahol $x \in A$, **ekvivalenciaosztály**oknak nevezzük. Egy rögzített ekvivalenciaosztályba tartoznak az egymással relációban lévő elemek. Az ekvivalenciaosztályok halmazát a ρ -hoz rendelt **faktorhalmaz**nak nevezzük: $A/\rho = \{\rho\langle x \rangle : x \in A\}$.

Példák. 1) A $\mathbb{Z}$ halmazon az előbbi, $a \equiv b \pmod{6}$ kongruencia relációhoz rendelt faktorhalmaz $\mathbb{Z}/\equiv = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$, ahol $\hat{k} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv k \pmod{6}\} = \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x - k\} = \{\dots, k - 12, k - 6, k, k + 6, k + 12, \dots\}$.

2) $A/1_A = \{\{x\} : x \in A\}$ és $A/(A \times A) = \{A\}$.

Legyen A egy nemüres halmaz és legyen $(B_i)_{i \in I}$ az A részhalmazainak egy rendszere (itt I egy ún. indexhalmaz): $B_i \subseteq A$ minden $i \in I$ -re. Azt mondjuk, hogy $(B_i)_{i \in I}$ egy **osztályfelbontása** vagy **osztályozása** A -nak, ha

- a) $B_i \neq \emptyset, \forall i \in I$,
- b) $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i, j \in I, i \neq j$, azaz bármely két különböző részhalmaz diszjunkt,
- c) $A = \cup_{i \in I} B_i$, azaz a $(B_i)_{i \in I}$ -beli részhalmazok uniója az adott A halmaz.

Például az $A = \{1, 2, 3, 4, 4, 6\}$ halmaznak a $B_1 = \{1, 2\}, B_2 = \{3, 4\}, B_3 = \{5\}, B_4 = \{6\}$ részhalmazok egy osztályfelbontását adják.

A következő tétel azt mutatja, hogy az ekvivalenciarelációk és az osztályfelbontások kölcsönösen meghatározzák egymást. Ha ugyanis adott egy ekvivalenciareláció, akkor gyűjtsük össze az egymással relációban levő elemeket és egy osztályfelbontást kapunk. Ha pedig adott egy osztályfelbontás, akkor képezzük azt a relációt, mely szerint 2 elem relációban van, ha ugyanahhoz az osztályhoz tartoznak. Ez ekvivalenciareláció lesz. Pontosabban,

Tétel. Legyen A egy nemüres halmaz.

1) Ha ρ egy ekvivalenciareláció az A -n, akkor az $A/\rho = \{\rho\langle x \rangle : x \in A\}$ faktorhalmaz egy osztályfelbontása A -nak.

2) Legyen $(B_i)_{i \in I}$ egy osztályfelbontása A -nak és értelmezzük a következő relációt: $\rho = (A, A, R)$, ahol $R = \cup_{i \in I} (B_i \times B_i)$, azaz $x\rho y \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$ (x és y ugyanahhoz a B_i -hez tartoznak). Akkor ρ ekvivalenciareláció az A -n.

3.6. Rendezési relációk. Legyen $\rho = (A, A, R)$ egy homogén reláció. Emlékeztünk arra, lásd fennebb, hogy ρ **rendezési reláció** és (A, ρ) **rendezett halmaz**, ha ρ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Ekkor azt mondjuk, hogy (A, ρ) **teljesen rendezett halmaz** vagy **lánc**, ha a következő tulajdonság is teljesül: $\forall x, y \in A \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x$ (másképpen $\rho \cup \rho^{-1} = A \times A$, az univerzális reláció), azaz A bármely két eleme összehasonlítható a ρ reláció szerint.

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$ teljesen rendezett halmazok.

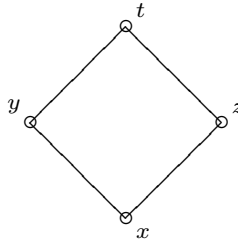
2) $(\mathbb{N}, |)$ rendezett halmaz és nem teljesen rendezett, mert pl. 2 és 3 nem hasonlíthatók össze, egyik sem osztója a másiknak.

3) Ha A egy tetszőleges halmaz, akkor $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ rendezett halmaz. Ha A -nak egynél több eleme van, akkor $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ nem teljesen rendezett.

Ha ρ rendezési reláció, akkor $x\rho y$ helyett gyakran $x \leq y$ -t írunk, akkor is, ha ρ nem a szokásos "kisebb vagy egyenlő" reláció. További jelölések: $x < y$, ha $x \leq y$ és $x \neq y$ (szigorú egyenlőtlenség); $x > y$, ha $y < x$.

A véges rendezett halmazokat **Hasse-féle diagram**okkal ábrázoljuk. Ha $x < y$ és ha nem létezik $z \in A$ úgy, hogy $x < z < y$, akkor az y pontot az x pontnál magasabb szinten helyezzük el és a két pontot egy egyenes szakasszal összekötjük.

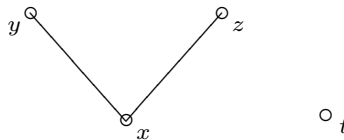
Példák. Legyen $A = \{x, y, z, t\}$ és tekintsük azt a rendezési relációt A -n, melynek grafikonja $R = \{(x, x), (y, y), (z, z), (t, t), (x, y), (x, z), (x, t), (y, t), (z, t)\}$, azaz $x < y < t$, $x < z < t$. Ennek Hasse-diagramja:



Ha a grafikon $R = \{(x, x), (y, y), (z, z), (t, t), (x, y), (x, z), (x, t), (y, z), (y, t), (z, t)\}$, akkor $(A, \leq)$ lánc és a Hasse-diagram a következő :



A harmadik diagram azt a rendezési relációt adja meg, melyre $x < y, x < z$, y és z nem hasonlíthatók össze, továbbá t nem hasonlítható össze az x, y, z egyikével sem.



3.7. Feladatok

1. Adott $A = \{x, y, z, t\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Írjuk fel az $A \times B$ és $B \times A$ halmazokat.

2. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $\rho = (A, B, R)$, ahol $R = \{(a, b) \in A \times B : a + b = 8\}$.

- Adjuk meg az R halmazt.
- Adjuk meg a relációt diagrammal.

3. Az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon adott a következő homogén reláció:

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$.

Adjuk meg gráffal ezt a relációt. Rendelkezik-e a reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonságokkal? Ekvivalenciareláció-e? Ha nem, akkor adjunk meg az A halmazon egy ekvivalenciarelációt.

4. Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon a ρ relációt így definiáljuk: $(a, b) \rho (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Igazoljuk, hogy ρ ekvivalenciareláció.

5. A $H = \{a, b, c, d\}$ halmazon adjunk meg egy-egy olyan relációt, amely

- reflexív, szimmetrikus, de nem tranzitív,
- nem reflexív, de szimmetrikus és tranzitív,

- c) reflexív, tranzitív, de nem szimmetrikus,
- d) reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív.
- 6.** Adjuk meg az összes ekvivalenciarelációt az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon.
- 7.** Határozzuk meg az összes rendezési relációt az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon (készítsünk Hasse-féle diagramokat).
- 8.** Legyen ρ_1 és ρ_2 két ekvivalenciareláció az A halmazon. Igazoljuk, hogy
 - a) ρ_1^{-1} és $\rho_1 \cap \rho_2$ ekvivalenciareláció,
 - b) $\mathbb{C}\rho_1$ és $\rho_1 \cup \rho_2$ általában nem ekvivalenciareláció.
- 9.** Legyen ρ egy reflexív és tranzitív reláció az A halmazon. Igazoljuk, hogy $\rho \cap \rho^{-1}$ ekvivalenciareláció.
 Vizsgáljuk azt az esetet, mikor $A = \mathbb{R}$ és ρ a " $\leq$ " reláció.
- 10.** Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
 - a) Ha $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1)\}$, határozzuk meg a megfelelő osztályfelbontást.
 - b) A $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ osztályfelbontáshoz határozzuk meg a megfelelő ekvivalenciarelációt.
- 11.** A komplex számok halmazán tekintsük a ρ_1 és ρ_2 relációkat, ahol $z\rho_1 w \Leftrightarrow |z| = |w|$ és $z\rho_2 w \Leftrightarrow z = w = 0$ vagy $\arg z = \arg w$. Igazoljuk, hogy ρ_1 és ρ_2 ekvivalenciarelációk és ábrázoljuk grafikusan a $\mathbb{C}/\rho_1$ és $\mathbb{C}/\rho_2$ osztályait.

4. FÜGGVÉNYEK

4.1. A függvény fogalma. Az $f = (A, B, F)$, $F \subseteq A \times B$ relációt **függvénynek** vagy **leképezésnek** nevezzük, ha minden $a \in A$ esetén az $f\langle a \rangle$ metszet egyelemű részhalmaza B -nek. Ez azt jelenti, hogy az f függvény az A halmaz minden elemének megfelelteti a B halmaz egy és csak egy elemét.

Ha $f = (A, B, F)$ egy függvény, akkor A -t az f **értelmezési halmazának** vagy **értelmezési tartományának** nevezzük, jelölés $A = \text{dom}f$ (f doméniuma). A B halmaz az f **értékkészlete**, jelölés $B = \text{codom}f$ (f codoméniuma), az $f(A)$ metszet az f függvény **értéktartománya** vagy **képe**, jelölés $f(A) = \text{Im}f$, F pedig a függvény grafikonja.

Ha $f = (A, B, F)$ egy függvény, akkor a következő jelöléseket használjuk:

$f : A \rightarrow B$, $A \xrightarrow{f} B$. Ha $a \in A$, akkor az $f\langle a \rangle = \{b\}$ egyenlőséggel meghatározott $b \in B$ elem jelölése $b = f(a)$ vagy $a \mapsto b = f(a)$.

Megjegyzések. a) Az $f : A \rightarrow B$ és $f' : A' \rightarrow B'$ függvények akkor és csak akkor egyenlőek ($f = f'$), ha $A = A'$, $B = B'$ és $f(a) = f'(a')$ minden $a \in A$ esetén.

b) Ha $f : A \rightarrow B$ egy függvény és $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, $y \in Y$, akkor $f(X) = \{b \in B \mid \exists x \in X : f(x) = b\} = \{f(x) : x \in X\}$, $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid \exists y \in Y : af^{-1}y\} = \{a \in A \mid \exists y \in Y : f(a) = y\} = \{a \in A : f(a) \in Y\}$ és $f^{-1}\langle y \rangle = f^{-1}(y) = \{a \in A : f(a) = y\}$, a grafikon pedig $F = \{(a, f(a)) : a \in A\}$.

c) A 3. szakasz 1. Példájában szereplő reláció nem függvény, mert például $\rho\langle a \rangle = \{1, 2\}$ kételemű halmaz. A $\rho' = (A, B, R')$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2\}$, $R' = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$ reláció függvény.

4.2. Karakterisztikus függvény. Legyen E egy halmaz és $A \subseteq E$. A $\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvényt az A részhalmaz **karakterisztikus függvényének** nevezzük.

Tétel. Ha $A, B \subseteq E$, akkor

- i) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$, $\forall x \in E$,
- ii) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$, $\forall x \in E$,
- iii) $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$, $\forall x \in E$,
- iv) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \chi_B(x)$, $\forall x \in E$,
- v) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \chi_B(x)$, $\forall x \in E$,
- vi) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x))$, $\forall x \in E$,
- vii) $\chi_{A \Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x) \chi_B(x) = (\chi_A(x) - \chi_B(x))^2$, $\forall x \in E$.

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy $A \subseteq B$ és legyen $x \in E$. A következő eseteket vizsgáljuk: 1. $x \in A, x \in B$, akkor $1 \leq 1$ igaz, 2. $x \in A, x \notin B$, ez lehetetlen, 3. $x \notin A, x \in B$, akkor $0 \leq 1$ igaz, 4. $x \notin A, x \notin B$, akkor $0 \leq 0$ igaz.

Másképp: az igazolandó egyenlőtlenség csak akkor lenne hamis, ha $\chi_A(x) = 1$ és $\chi_B(x) = 0$. De ekkor $x \in A$ és $x \notin B$, ami ellentmond a feltételnek.

Hasonlóképpen a fordított implikáció.

ii) Következik i) alapján.

A többi összefüggés az előbbi 4 eset vizsgálatával igazolható, vagy úgy, hogy használjuk az előző (és már igazolt) képleteket, például: vi) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, lásd 2. fejezet, és így

$$\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_{A \cap \bar{B}}(x) = \chi_A(x) \chi_{\bar{B}}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x)).$$

Megjegyzés. A ii) alapján ezek a képletek alkalmasak halmazok egyenlőségének a bizonyítására. Például igazoljuk, hogy $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (a szimmetrikus különbség asszociatív, lásd 2. szakasz):

$$\begin{aligned}\chi_{(A\Delta B)\Delta C} &= \chi_{A\Delta B} + \chi_C - 2\chi_{A\Delta B}\chi_C = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B - 2(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\chi_C = \\ (*) \quad &= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C,\end{aligned}$$

ahol függvényegyenlőségeket írtunk (x nélkül).

Hasonlóképpen számolva, $\chi_{A\Delta(B\Delta C)}$ is a (*) kifejezést adja. Másképp, Δ kommutativitása és (*) alapján

$$\begin{aligned}\chi_{A\Delta(B\Delta C)} &= \chi_{(B\Delta C)\Delta A} = \chi_B + \chi_C + \chi_A - 2(\chi_B\chi_C + \chi_B\chi_A + \chi_C\chi_A) + 4\chi_B\chi_C\chi_A = \\ &= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C,\end{aligned}$$

és készen vagyunk.

4.3. Injektív, szürjektív és bijektív függvények. Legyen $f : A \rightarrow B$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy

f **injektív**, ha A különböző elemeinek különböző képelemek felelnek meg, azaz, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Ez egyenértékű a következő állítással: $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

f **szürjektív**, ha B -nek minden eleme képelem, azaz, ha $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. Ez a feltétel így is írható: $f(A) = B$;

f **bijektív**, ha injektív és szürjektív, azaz, ha $\forall y \in B \exists! x \in A$ (létezik egy és csak egy $x \in A$): $f(x) = y$.

Példák: Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ függvény nem injektív, mert pl. $-1 \neq 1$ és $f(-1) = f(1) = 1$ és nem is szürjektív, mert pl. $y = -1 \in \mathbb{R}$ esetén nem létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = x^2 = -1$ legyen.

A $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ függvény injektív és nem szürjektív,

$h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), h(x) = x^2$ pedig injektív és szürjektív, tehát bijektív.

Bármely A halmaz esetén az $\mathbf{1}_A = (A, A, \Delta_A)$ diagonális reláció egy bijektív függvény.

4.4. Feladatok

- Igazoljuk a 4. fejezet 1. Tételének állításait !
- Karakterisztikus függvények segítségével igazoljuk, hogy
 - $A \setminus B = A \cap \overline{B}$,
 - $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
 - $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
- Legyen $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Adjunk meg egy-egy olyan A , B vagy C értelmezési tartományú és értékészletű függvényt, amely
 - szürjektív és nem injektív,
 - nem szürjektív és injektív,
 - szürjektív és injektív, tehát bijektív,
 - nem szürjektív és nem injektív.
- Injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e a következő függvények:
 - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x + 1$,
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$,
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 4$.

5. KIJELENTÉSLOGIKA

5.1. További logikai műveletek. Az 1. fejezetben megadtuk a kijelentések, valamint a következő logikai műveletek definícióit: negáció, diszjunkció, konjunkció, implikáció, ekvivalencia. Ezek közül a negáció egyváltozós művelet, a többi 2-2 változós. További három, gyakrabban használt kétváltozós logikai művelet:

Kizáró diszjunkció (antivalencia, Birkhoff-féle művelet), jele: $p \nabla q$, olvasd: "p kizárja q-t", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül pontosan az egyik igaz.

Köznyelvi példa ennek használatára: "A kapott pénzen vagy egy könyvet vagy egy CD-t vásárolok."

Összeférhetetlenséget kifejező diszjunkció, röviden: **összeférhetetlenség** (Sheffer-féle művelet), jele: $p \mid q$, olvasd: "p összeférhetetlen q-val", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül legfeljebb az egyik igaz.

Például, "Vagy beszél az ember, vagy eszik."

"Sem-sem" művelet (Webb-féle művelet), jele: $p \parallel q$, olvasd: "Sem p , sem q ", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül az egyik sem igaz.

Például, "Sem ma, sem holnap nem érek rá."

Táblázat segítségével az előbbi definíciók a következők:

p	q	$p \nabla q$	$p \mid q$	$p \parallel q$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0

Tétel. Az eddigi logikai műveletek mind kifejezhetők a negáció, a diszjunkció és a konjunkció műveletekkel. Pontosabban:

- i) $|p \rightarrow q| = |\neg p \vee q|$,
- ii) $|p \leftrightarrow q| = |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)|$,
- iii) $|p \nabla q| = |(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)|$,
- v) $|p \mid q| = |\neg(p \wedge q)|$,
- vi) $|p \parallel q| = |\neg(p \vee q)|$.

Bizonyítás. Táblázat segítségével, lásd 1. fejezet, Tétel.

Ennél több is igaz. Mivel a diszjunkció illetve a konjunkció megadható a másik művelet segítségével: $|p \vee q| = |\neg(\neg p \wedge \neg q)|$, $|p \wedge q| = |\neg(\neg p \vee \neg q)|$, lásd de Morgan képletek, ezért a definiált műveletek mind megadhatók a negáció és a diszjunkció (vagy a negáció és a konjunkció) segítségével. Például, az ekvivalencia így:

$$\begin{aligned}
 |p \leftrightarrow q| &= |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)| = |\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q))| = \\
 &= |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)| = |\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)|.
 \end{aligned}$$

Az eddigi logikai műveletek mindegyike, a negációt leszámítva, 2-változós, hiszen 2 különböző kijelentésváltozó szerepel bennük. A negáció 1-változós. Általában egy n különböző kijelentésváltozótól függő n -változós kijelentéslogikai műveletet úgy értelmezzünk, hogy megadjuk 2^n soros logikai értéktáblázatát. Következik, hogy összesen 2^{2^n} számú n -változós kijelentéslogikai művelet definiálható. Ha $n = 2$, akkor a 2-változós műveletek száma $2^{2^2} = 16$.

Igaz a következő is:

Tétel. Minden n -változós ($n \geq 1$) kijelentéslogikai művelet kifejezhető a negáció és a konjunkció (diszjunkció) segítségével.

Bizonyítás. Legyen pl. $n = 3$ és határozzuk meg azt a 3-változós A műveletet, amelyre:

p	q	r	A
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	h
h	h	h	i

Válasszuk ki azokat a sorokat, amelyekre A igaz. Ezekben a sorokban írjuk le a kijelentésváltozókat, ha ezek értéke 1 és negáljuk ezeket, ha ezek értéke 0. Vegyük ezeknek a konjunkcióját, majd az így kapott konjunkcióknak a diszjunkcióját. Azt állítjuk, hogy ez megadja az A -t:

$$(1) \quad A = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Valóban, jelölje B az (1) jobb oldalát. Tekintsük a táblázat k -adik olyan sorát, amelyre A igaz. Akkor a felírt k -adik zárójel értéke i , a többi h , ezért $|B| = i$. Továbbá minden olyan sorra, ahol A hamis, minden felírt zárójel értéke h , így $|B| = h$. Kapjuk, hogy $B = A$. Továbbá - ahogy már láttuk - a diszjunkció, illetve a konjunkció megadható a másik művelet és a negáció segítségével.

Megjegyzés. Azonosságaink alkalmazásával (1)-et egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$\begin{aligned} A &= [(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \vee [(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)] \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) = \\ &= [(p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r)] \vee [(p \vee \neg p) \wedge (q \wedge r)] \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) = \end{aligned}$$

$$(2) \quad = (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r),$$

5.2. Kijelentéslogikai formulák. Írjuk fel a következő összetett kijelentésnek a szerkezetét: "Amennyiben Kiss vagy Nagy tanár úr elutazik, a fizika helyett akkor lesz matematika, ha Joó tanár úrnak nincs órája."

Először az elemi kijelentésekre **kijelentésváltozókat** vezetünk be:

p : "Kiss tanár úr elutazik."

q : "Nagy tanár úr elutazik."

r : "A fizika helyett matematika lesz."

s : "Joó tanár úrnak órája van."

Ezután – megállapítva a műveletek sorrendjét – felírjuk a kijelentés szerkezetét:

$$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow \neg s).$$

A kijelentések szerkezetének, ún. durvaszerkezetének így történő felírását **formalizálásnak**, a kapott jelsorozatot (képletet) pedig **formulának** nevezzük.

Látható, hogy a durvaszerkezet csupán formális séma, tehát nem használja ki sem a kijelentések tartalmát, sem a belső szerkezetét.

A formulákat nagybetűkkel jelöljük, például:

$$A = (p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow \neg s).$$

Más példa. "Ha 12 osztható 2-vel és 3-mal, akkor osztható 6-tal." durvaszerkezete $B = (p \wedge q) \rightarrow r$, ahol p : "12 osztható 2-vel", q : "12 osztható 3-mal", r : "12 osztható 6-tal".

A kijelentéslogika **szimbólumai** a következők:

- a) a kijelentésváltozók jelei: $p, q, \dots$,
- b) a logikai műveletek jelei: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$,
- c) zárójelpárok: $(,)$, ezek a műveletek hatáskörét, sorrendjét és egyértelműségét biztosítják.

A **kijelentéslogika formulái** így definiálhatók:

- 1. a kijelentésváltozók jelei formulák,
- 2. ha A, B formulák, akkor $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ is formulák,
- 3. minden formula előáll véges sok lépésben az 1. és 2. alakú formulákból.

További példák formulákra: $C = ((p \vee \neg q) \vee r) \rightarrow (s \wedge \neg s)$, $D = ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \vee (s \wedge r)$. Nem formulák például a következők: $p \wedge (q \rightarrow \wedge r)$, $(pq \wedge (r \wedge p \neg q))$.

Megjegyzések. A 2.-ben szereplő zárójelpárok akkor lényegesek, ha ezek a formulák nagyobb formulák részeként szerepelnek. Befejezett formulák esetében a külső zárójelpárok elhagyhatók. Ha azt is jelölni akarjuk, hogy az A formulát a $p_1, \dots, p_n$ kijelentésváltozókból képeztük, akkor az $A(p_1, \dots, p_n)$ jelölést használjuk.

Azt mondjuk, hogy B **részformulája** az A kijelentéslogikai formulának, ha B előáll A képzése során.

Példa. $(p \wedge q) \vee \bar{r} \rightarrow (t \vee p)$ formulának $p \wedge q$, $t \vee p$ részformulái de $p \rightarrow (t \vee p)$ nem.

Helyettesítésről beszélünk, ha egy A formulában valamely p kijelentésváltozó vagy R részformula helyére egy C formulát írunk. Jelölés: $A(C/p)$, illetve $A(C/B)$.

Különböző kijelentéseknek lehet egymással azonos a szerkezete. Például, a fenti A formula az alábbi kijelentésnek is a szerkezete:

"Ha TV-t nézek vagy strandolok, akkor a vizsgán csak abban az esetben megyek át, ha nem húzok nehéz tételt."

Ez a formalizálás fordított eljárása: a kijelentésváltozókhöz konkrét kijelentéseket rendelünk. Ekkor azt mondjuk, hogy megadjuk a formula egy **szöveges interpretációját**.

Ha a formulában szereplő kijelentésváltozóknak a logikai értékét adjuk meg, akkor logikai értékekkel adott interpretációról, röviden **interpretációról** beszélünk.

A fenti A formula egy interpretációja: $|p| = 1, |q| = 0, |r| = 1, |s| = 0$.

Négy változó esetén az interpretációk száma: $2^4 = 16$. Egy n -változós formulának 2^n számú interpretációja van.

Ha egy A formula valamely interpretációjára $|A| = 1$ (illetve $|A| = 0$), akkor azt mondjuk, hogy a tekintett interpretáció az A -t **igazzá** (illetve **hamissá**) **teszi**.

Az A formulát **kielégíthetőnek** (**kielégíthetetlennek**) nevezzük, ha van (nincs) olyan interpretációja, amely igazzá teszi.

Azonosan igaz formulának vagy **tautológiának** nevezünk egy A formulát, ha azt minden interpretáció igazzá teszi, jelölés: $|A| \equiv 1$ vagy $A = \mathbf{1}$ vagy $\models A$.

Egy A formula **azonosan hamis** vagy **kontradikció**, ha azt minden interpretáció hamissá teszi (ez nem más, mint a kielégíthetetlen formula), jelölés: $|A| \equiv 0$ vagy $A = \mathbf{0}$.

A tautológia jelölése tehát **1**, a kontradikció jelölése **0**.

A kielégíthető, de nem azonosan igaz formulákat **kontingens formuláknak** is nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az A és B formulák **egyenértékűek** vagy **logikailag ekvivalensek**, ha $A \leftrightarrow B$ tautológia, azaz $|A \leftrightarrow B| \equiv 1$. Jelölés: $A \Leftrightarrow B$ vagy $|A| \equiv |B|$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha az A -ban és B -ben szereplő összes kijelentésváltozó minden interpretációjára $|A| = |B|$.

Példaként vizsgáljuk meg a következő formulákat:

$$A = p \wedge \neg p, B = q \vee \neg q, C = p \rightarrow p, D = p \rightarrow q, E = \neg p \vee q, F = p \leftrightarrow \neg p.$$

Ezek közül B és C tautológia, A és F kontradikció, D és E kontingens formulák. Igaz az is, hogy e párok egyenértékűek.

Tetszőleges A formulára $\overline{A} \vee A$ tautológia és $\overline{A} \wedge A$ kontradikció. Továbbá A tautológia akkor és csak akkor, ha $\overline{A}$ kontradikció.

Matematikai tételekben a logikai ekvivalencia legtöbbször az alábbi formákban jelenik meg: *ha A , akkor B és ha B , akkor A ; A elégséges és szükséges feltétele B -nek; B akkor és csak akkor, ha A ; B pontosan akkor, ha A ; A ekvivalens B -vel.*

Az " A egyenértékű B -vel" egy, a formulák körében értelmezett reláció, jelölés: $A \Leftrightarrow B$, míg az implikáció egy kijelentéslogikai művelet (amely a p és q adott kijelentésekből, illetve az A és B formulákból egy új kijelentést, illetve formulát képez, jelölés $p \leftrightarrow q$, $A \leftrightarrow B$).

Tétel. A formulákra vonatkozó $\Leftrightarrow$ reláció egy ekvivalenciareláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Bizonyítás. Feladat.

Ha logikailag ekvivalens formulákban a kijelentésváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítjük, akkor ismét logikailag ekvivalens formulákhoz jutunk.

5.3. Normálformák. Ha adott egy kijelentéslogikai formula, akkor elkészíthetjük a hozzá tartozó igazságtáblázatot. Tekintsük most a fordított feladatot: adott egy A formulának az igazságtáblázata. Adjuk meg az A formulát! Lásd pl. az 5.1. szakasz végén adott táblázatot. Az ott leírtaknak megfelelően A így adható meg:

$$(1) \quad A = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r),$$

amit egyszerűbb alakra hozva:

$$(2) \quad A = (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Az A formulának (1) és (2) alakjai olyan szerepet töltenek be a kijelentéslogikában, mint a polinomok az algebrában. A -ban a főművelet a diszjunkció, e tagokban konjunkció szerepel, tehát az A formula: konjunkciók diszjunkciója (a polinom: szorzatok összege).

Az ilyen típusú formulákat **diszjunktív normálformáknak** nevezzük. Az (1) formula diszjunktív tagjaiban konjunkció tagként mind a három kijelentésváltozó előfordul, mégpedig vagy negálva, vagy negálatlanul. Az ilyen formulákat **teljes diszjunktív normálformáknak** nevezzük; (2) **nem teljes diszjunktív normálforma**.

Dualizáljuk az (1) formula felírásánál ismertetett eljárásunkat:

$$(3) \quad C = (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

Egyszerűbb alakra hozás után ebből a

$$(4) \quad C = (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

formula adódik. (3) **teljes konjunktív normálforma**, (4) **nem teljes konjunktív normálforma**.

5.4. Kijelentéslogikai tautológiák. Az alábbiakban felsorolunk néhány ismert tautológiát, amelyek ellenőrzése a logikai értéktáblázatok elkészítésével történik. Figyeljük meg, hogy ezekből visszkapjuk a logikai alpműveletek tulajdonságait, illetve a klasszikus logika néhány alapelvét.

Tétel. Ha A, B, C tetszőleges logikai formulák, akkor

- 1) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$, $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (asszociativitás),
- 2) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (kommutativitás),
- 3) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$, $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ (abszorpció),
- 4) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (disztributivitás),
- 5) $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$, $A \vee 0 \Leftrightarrow A$,
- 6) $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$, $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$,
- 7) $A \vee \bar{A} \Leftrightarrow 1$ (a harmadik kizárásának elve), $A \wedge \bar{A} \Leftrightarrow 0$ (az ellentmondás elve),
- 8) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$, $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$ (de Morgan képletek)
- 9) $A \wedge A \Leftrightarrow A$, $A \vee A \Leftrightarrow A$ (idempotencia),
- 10) $\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$ (a kettős tagadás elve),
- 11) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$,
- 12) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B$.

A következő tautológiák következtetéseknél használatosak (ezekre még visszatérünk):

- 13) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \rightarrow \bar{A}$ (kontrapozíció),
- 14) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$ (szillogizmus, a "szillogizmus" a hagyományos logika elnevezése, olyan következtetés, amelyben legalább két premissza van)
- 15) $(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$ (premisszák egyesítési és felbontási szabálya),
- 16) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (premisszák felcserélési szabálya),
- 17) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \bar{B}) \Rightarrow \bar{A}$ (reductio ad absurdum),
- 18) $A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$ (modus ponens),
- 19) $(\bar{A} \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \Rightarrow A$ (indirekt bizonyítás módszere),
- 20) $((C \vee B) \wedge (C \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow A)) \Rightarrow A$ (esetek elemzése).

5.5. Kijelentéslogikai következtetések. A logika egyik fontos feladata a következtetések vizsgálata. A **következtetések** egy vagy több feltételből, más néven **premisszából**, és egy állításból, más néven **következményből**, vagy **konklúzióból** állnak.

Nézzük először azt az esetet, amikor 1 premissza van. Azt mondjuk, hogy az A formulából **következik** a B formula (a B formula **következménye** az A formulának), ha az $A \rightarrow B$ formula tautológia. Jelölés: $A \Rightarrow B$ vagy $A \models B$. Ez akkor teljesül, ha minden olyan interpretáció, amely az A -t igazgá teszi, a B -t is igazgá teszi.

Matematikai tételekben ez úgy szokott szerepelni, hogy: *ha A , akkor B ; A elégséges feltétele B -nek; csak akkor A , ha B ; B szükséges feltétele A -nak*. Például: "Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos."

Az " A -nak következménye B " tehát egy, a formulák körében értelmezett reláció, amelynek jelölése: $A \Rightarrow B$. Ugyanakkor az implikáció egy kijelentéslogikai művelet (amely a p és q adott kijelentésekből, illetve az A és B formulákból egy új kijelentést, illetve formulát képez, jelölés $p \rightarrow q$, $A \rightarrow B$).

Tétel. A formulákra vonatkozó $\models$ reláció

- a) reflexív, azaz minden A formulára $A \models A$,
- b) tranzitív, azaz minden A, B, C formulára ha $A \models B$ és $B \models C$, akkor $A \models C$,
- c) nem szimmetrikus, azaz ha $A \models B$, akkor általában $B \models A$ nem teljesül,
- d) minden A, B formulára ha $A \models B$ és $B \models A$, akkor $A \Leftrightarrow B$.

Bizonyítás. Feladat.

Általánosan, nézzük most azt, amikor több premissza van.

Példa.

(1) József Debrecenbe vagy Miskolcra utazik.

(2) József nem Miskolcra utazik.

(3) József Debrecenbe utazik.

A premisszák és a konklúzió közé vonalat szokás húzni. Ezt a következtetést helyesnek tartjuk, mert ha (1) és (2) igaz, akkor (3) szükségképpen igaz.

E következtetés szerkezete (**sémája**):

(1) $p \vee q$

(2) $\neg q$

(3) p

Ugyancsak helyesnek ítéljük mindazokat a következtetéseket, amelyek a fenti séma interpretációiként adódnak. Eszerint egy következtetés helyessége annak a szerkezetétől és nem a tartalmától függ.

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 0$) premisszáknak **következménye** a B konklúzió (kijelentéslogikai értelemben), ha minden olyan interpretáció, amely az $A_1, A_2, \dots, A_n$ mindegyikét igazzá teszi, a B -t is igazzá teszi. Jelölés: $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$, vagy $A_1, \dots, A_n \models B$, vagy $\frac{A_1, \dots, A_n}{B}$.

Megjegyzés. Az $n = 0$ eset azt jelenti, hogy B tautológia, azaz $\models B$.

E definíció alapján az $A_1, A_2, \dots, A_n$ premisszák helyettesíthetők az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ formulával és a következtetési séma helyességére szükséges és elégséges feltételt ad a következő tétel.

Tétel. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formuláknak akkor és csak akkor következménye a B formula, ha $|(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B| \equiv 1$.

Tehát $n = 1$ -re visszkapjuk a korábbi következményfogalmat.

Azt mondjuk, hogy egy következtetés **helyes**, ha a sémája helyes.

5.6. Következtetési sémák. Néhány egyszerű, gyakran előforduló következtetési séma (ezek a hagyományos - arisztotelészi - logika következtetési sémái) :

Tétel.

1. $A \rightarrow B$

$\frac{A}{B}$

leválasztási szabály (modus ponens) ;

2. $A \rightarrow B$

$\frac{\neg B}{\neg A}$

az indirekt bizonyítás sémája (modus tollens) ;

3. $A \rightarrow B$

$\frac{A \rightarrow \neg B}{\neg A}$

redukció ad abszurdum (a lehetetlenre való visszavezetés) sémája;

4. $A \rightarrow B$

$\frac{\neg B \rightarrow \neg A}{\neg B \rightarrow \neg A}$

kontrapozíciós következtetési séma;

5. $A \vee B$

$\frac{\neg B}{A}$

diszjunktív szillogizmus (modus tollendo ponens);

$$\begin{array}{c}
 6. \quad \frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C} \quad \text{láncszabály vagy feltételes szillogizmus.}
 \end{array}$$

Bizonyítás. A definíció alapján, lásd az 5.7. szakaszt.

További tulajdonságok :

- Tautológiának csak tautológia lehet következménye.
- Tautológia bármilyen formulának következménye.
- Kontradikciónak bármilyen formula következménye.
- Kontradikció csak kontradikciónak lehet következménye.
- $A \Rightarrow A$ (reflexivitás)
- Ha $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_j$ (minden $j = 1, \dots, m$ esetén) és $B_1, \dots, B_m \Rightarrow C$, akkor $A_1, \dots, A_n \Rightarrow C$ (tranzitivitás).
- Ha $A_1 \Rightarrow A_2, \dots, A_{n-1} \Rightarrow A_n$, és $A_n \Rightarrow A_1$, akkor $A_1, \dots, A_n$ formulák ekvivalensek (ciklikus bizonyítás).

5.7. Következtetések vizsgálata. Az alábbiakban bemutatunk néhány, a következtetések helyességének eldöntésére alkalmas módszert.

1. Alkalmazzuk a definíciót, készítsünk értéktáblázatot (a példa legyen a diszjunktív szillogizmus):

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
i	i	i	h	i
i	h	i	i	i
h	i	i	h	h
h	h	h	i	h

A második sorban (és csak ebben) igaz mind a két premissza és e sorban igaz a konklúzió is, a következtetés tehát helyes.

2. Bizonyítsuk be a leválasztási szabály helyességét. A definíció helyett alkalmazhatjuk a fenti Tételt. Értéktáblázattal megmutatjuk, hogy $|((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q| \equiv 1$.

3. Tegyük fel, hogy létezik olyan interpretáció, amely a premisszákat igazzá, a konklúziót hamissá teszi. Ha ellentmondásra jutunk (azaz, ha nem létezik a feltételezett interpretáció), akkor a következtetés helyes; ha nem jutunk ellentmondásra (azaz, ha találunk ilyen interpretációt), akkor a következtetés helytelen. Példaként tekintsük a láncszabályt:

Ha $|p \rightarrow q| = 1$, $|q \rightarrow r| = 1$ és $|p \rightarrow r| = 0$, akkor ez utóbbiból $|p| = 1$, $|r| = 0$, ahonnan az első feltételből $|q| = 1$, a másodikból pedig $|q| = 0$, ami ellentmondás, tehát a következtetés helyes.

Sok esetben, például matematikai tételek bizonyításánál, az adott következtetési séma helyett vele ekvivalens sémák helyességét igazolhatjuk könnyebben. Aszerint, hogy milyen ekvivalens sémákat cserélünk ki, különböző bizonyítási módszerekről beszélhetünk. A megfelelő sémák ekvivalenciáját pl. táblázatok segítségével láthatjuk be.

(1) **Feltételes bizonyításról** beszélünk, amikor az $A \Rightarrow (B \rightarrow C)$ sémát a vele ekvivalens $A, B \Rightarrow C$ sémával helyettesítjük.

Valóban, ez táblázattal igazolható vagy a korábbi műveleti tulajdonságok szerint így:

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow (B \rightarrow C) &\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C.
 \end{aligned}$$

- (2) **Kontrapozíciós bizonyításról** beszélünk, amikor az $A, B \Rightarrow C$ sémát a vele ekvivalens $A, \overline{C} \Rightarrow \overline{B}$ sémával helyettesítjük.

Valóban, ez táblázattal igazolható vagy így:

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \rightarrow C &\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C) \vee \neg B \Leftrightarrow (A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B. \end{aligned}$$

- (3) **Indirekt bizonyítás** esetén az $A \Rightarrow B$ alakú séma helyett az $A \wedge \overline{B}$ formuláról mutatjuk meg, hogy kontradikció.

Igazoljuk ezt!

A kijelentéslogikában minden formuláról eldönthető véges sok lépésben, hogy tautológia-e vagy sem, pl. a táblázat elkészítésével. Így kijelentéslogikában minden következtetésről is eldönthető véges sok lépésben, hogy helyes-e vagy sem.

5.8. Levezetés a kijelentéslogikában

A fentiekben vizsgáltuk a kijelentéslogikai következményfogalmat és módszereket adtunk következtetések helyességének az igazolására. Bonyolultabb formulák esetén azonban a fentiek szerint nehézkes lehet annak igazolása, hogy egy B formula következménye az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formuláknak.

Léteznek olyan következtetési lépések, amelyek egymás utáni elvégzésével el lehet dönteni, hogy teljesül-e $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$. Az ilyen következtetési szabályok rendszerét kijelentéslogikai levezetésnek vagy dedukciónak nevezzük. Pontosabban:

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ ($n \geq 0$) adott kijelentéslogikai formulák és legyen $\mathcal{T}$ bizonyos tautológiák egy halmaza. Az $E_1, E_2, \dots, E_k$ formulasorozatot a B formulának az $A_1, A_2, \dots, A_n$ premisszákból a $\mathcal{T}$ segítségével történő **levezetésének** nevezzük, ha

- 1) $E_k = B$,
- 2) minden $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ esetén
 - (a) E_i egy premissza, azaz $E_i \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, vagy
 - (b) E_i valamely $\mathcal{T}$ -beli tautológiából helyettesítéssel keletkezik, vagy
 - (c) vannak az $E_1, E_2, \dots, E_k$ sorozatban az E_i -t megelőző olyan $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_s}$ formulák, hogy

$$(E_{i_1} \wedge E_{i_2} \wedge \dots \wedge E_{i_s}) \rightarrow E_i$$

egy $\mathcal{T}$ -beli tautológiából helyettesítéssel áll elő.

Tétel. Ha a B kijelentéslogikai formula levezethető az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulákból (premisszákból) a $\mathcal{T}$ segítségével, akkor B következménye az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formuláknak, azaz $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden i -re

$$(1) \quad A_1, A_2, \dots, A_n \models E_i.$$

Ha E_i -re a) vagy b) teljesül, akkor ez az állítás a definíciók alapján azonnali. A c) eset $i = 1$ -re nem teljesülhet, ezért következik, hogy az állítás $i = 1$ -re igaz. Tegyük fel most, hogy $i \geq 2$ és

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models E_1, E_2, \dots, E_{i-1}.$$

Elegendő azt az esetet néznünk, amikor E_i -re c) teljesül. Az indukciós feltétel szerint akkor minden olyan interpretáció, amely az $A_1, A_2, \dots, A_n$ mindegyikét igazgá teszi az $E_1, E_2, \dots, E_{i-1}$ formulákat is igazgá teszi. Továbbá, mivel $(E_{i_1} \wedge E_{i_2} \wedge \dots \wedge E_{i_s}) \rightarrow E_i$

tautológia, ezért minden ilyen esetben E_i is igaz. Következik, hogy (1) igaz minden i -re. Az $i = k$ esetben kapjuk, hogy

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models E_k = B,$$

amit igazolni akartunk.

Példa. Adjunk levezetést a következőre:

$$A, \overline{C}, (B \wedge A) \rightarrow C \models \overline{B}.$$

A levezetés lépései a következők:

- (1) $E_1 = \overline{C}$ [(a) - premissza]
- (2) $E_2 = (B \wedge A) \rightarrow C$ [(a) - premissza]
- (3) $E_3 = \overline{B \wedge A}$ [(c) - a $(\overline{B} \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \overline{A}$ tautológiában legyen $A := B \wedge A$, $B := C$, ekkor $(E_1 \wedge E_2) \rightarrow E_3$]
- (4) $E_4 = \overline{B} \vee \overline{A}$ [(c) - az $(\overline{A \wedge B}) \rightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$ tautológiában legyen $A := B$, $B := A$, ekkor $E_3 \rightarrow E_4$]
- (5) $E_5 = \overline{A} \vee \overline{B}$ [(c) - az $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$ tautológiában legyen $A := B$, $B := A$, ekkor $E_4 \rightarrow E_5$]
- (6) $E_6 = A \rightarrow \overline{B}$ [(c) - az $(\overline{A} \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ tautológiában legyen $A := A$, $B := \overline{B}$, ekkor $(E_5 \rightarrow E_6)$]
- (7) $E_7 = A$ [(a) - premissza]
- (8) $E_8 = \overline{B}$ [(c) - a leválasztás: $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ tautológiában legyen $A := A$, $B := \overline{B}$, ekkor $(E_7 \wedge E_6) \rightarrow E_8$].

Amint látható a levezetések általában nem túl egyszerűek.

Az első kérdés ezek után az, hogy létezik-e tautológiákból álló olyan $\mathcal{T}$ halmaz, hogy tetszőleges formulák esetén igaz az előbbi Tételbeli állítás megfordítása is, azaz ha $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$, akkor a B formula levezethető az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulákból a $\mathcal{T}$ segítségével?

A válasz igenlő, ezt G. Frege (1848-1925, német) bizonyította be 1879-ben.

A következő kérdés: hogyan lehet megadni egy ilyen és viszonylag egyszerű $\mathcal{T}$ halmazt?

A leggyakrabban idézett ilyen $\mathcal{T}$ halmazt J. Lukasiewicz (1878-1956, lengyel) matematikus szerkesztette meg és ez a következő: $\mathcal{T}_L = \{T_1, T_2, T_3, MP\}$, ahol

$$T_1 : A \rightarrow (B \rightarrow A),$$

$$T_2 : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$T_3 : (\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow (A \rightarrow B),$$

$$MP : A, A \rightarrow B \Rightarrow B, \quad \text{ez a Modus Ponens (leválasztás) következtetési séma,}$$

Igaz a következő tétel, amelynek bizonyítása további ismereteket igényel és nagyon bonyolult.

Tétel. (A kijelentéslogika teljességi tétele) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ tetszőleges kijelentéslogikai formulák, akkor egyenértékűek a következő állítások:

- 1) $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$,
- 2) B levezethető az $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulákból a $\mathcal{T}_L$ segítségével, ahol b) típusú eljárásként csak a T_1, T_2, T_3 tautológiák valamelyikét használjuk, c) típusú lépésként pedig csak az MP leválasztást használjuk.

5.9. Feladatok

- Igazoljuk, hogy ha p, q tetszőleges kijelentések, akkor
 - $|p \wedge (q \vee r)| = |(p \wedge q) \vee (p \wedge r)|$
 - $|(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)| = |p \leftrightarrow q|$.
- Adjuk meg táblázattal mind a 16 kétváltozós logikai műveletet. Keressük meg közöttük a tanultakat.
- Hozzuk egyszerűbb alakra a következő formulákat:
 - $A = \neg(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
 - $B = \neg((p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge r) \vee \neg(p \vee \neg q)$.
- Állapítsuk meg, hogy tautológiák-e a következő formulák:
 $A_1 = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$, $A_2 = ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$.
- Igazoljuk, hogy a következő formulák tautológiák:
 - $A \rightarrow A$,
 - $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$,
 - $(\bar{B} \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \bar{A}$,
 - $(\bar{A} \wedge (A \vee B)) \rightarrow B$,
 - $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$,
 - $(A \wedge B) \rightarrow A$,
 - $A \rightarrow (A \vee B)$.
- Egy papiron az alábbi száz kijelentő mondat olvasható:
 - Ezen a papiron pontosan egy kijelentés hamis.
 - Ezen a papiron pontosan két kijelentés hamis.

.....
 100. Ezen a papiron pontosan száz kijelentés hamis.

(A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövideg kedvéért nem írtuk le mind a száz kijelentő mondatot.)

Kijelentések-e a fenti kijelentő mondatok? Amennyiben igen, mi a logikai értékük?

Megoldás. Az adott mondatok egymásnak ellentmondanak, ezért ha kijelentések, akkor közülük legfeljebb egy lehet igaz. Ha 1. igaz, akkor a többi 99 hamis, ami ellentmond az 1. állításának. Ha 2. igaz, akkor a többi 99 hamis, ami ellentmond a 2. állításának, stb. Csak az lehetséges, hogy a 99. állítás igaz és a többi mind hamis.

- Formalizáljuk (írjuk fel képlettel) a következőket:

$A =$ "Színházba vagy moziba megyek, vagy sem színházba sem moziba nem megyek."

$B =$ " Minden nullára végződő szám páros, és minden nullára végződő szám osztható 4-gyel. "

Igaz-e a B állítás ?

- Formalizáljuk a következőket:

$C =$ " János akkor és csak akkor mérges, ha testvére akkor vitatkozik vele, ha ő siet."

$D =$ " Nem szeretek kirándulni, ha fúj a szél és nem süt a nap, vagy hideg az idő."

$E =$ " Lehetetlen, hogy állásod van, kereseted meg nincs."

$F =$ " Ha az ellenállás növekszik és a feszültség állandó, akkor az áramerősség csökken."

- Helyes-e az alábbi következtetés ?

$(p \wedge q) \leftrightarrow r$

$r \leftrightarrow s$

$\neg(p \rightarrow s)$

$q \rightarrow s$

- Helyes-e az alábbi következtetés ?

$(q \vee p) \rightarrow r$

$r \rightarrow (t \vee s)$

$s \rightarrow u$

$\neg t \rightarrow \neg u$

q

11. Helyes-e az alábbi következtetés ?

(1) Ha a motor működik, akkor – amennyiben az akkumulátor nincs kimerülve – a jelzőlámpa ég.

(2) Ha az akkumulátor kimerült, akkor a motor nem működik.

(3) Ha a jelzőlámpa ég, akkor a motor működik.

Ha az akkumulátor nincs kimerülve, akkor a motor működik és a jelzőlámpa ég.

12. Helyes-e az alábbi következtetés ?

(1) Ha Lajos nem érkezik meg idejében, vagy nem hoz magával példatárat, akkor nem tudjuk megoldani az algebra feladatokat, vagy csak nagyon nehezen.

(2) Ha Lajos nem hoz példatárat, vagy nem tudjuk megoldani az algebra feladatokat, akkor Béla ideges lesz.

(3) Lajos megérkezik idejében, Béla pedig nem lesz ideges.

Meg tudjuk oldani az algebra feladatokat.

Milyen további konkluziókat vonhatunk még le ?

13. Adjunk meg egy olyan A logikai formulát, melynek értéktáblázata:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

14. Adjunk meg egy olyan B logikai formulát, melynek értéktáblázata:

p	q	r	B
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

6. PREDIKÁTUMLOGIKA

6.1. Durvaszerkezet és finomszerkezet. Tekintsük az alábbi következtetést:

A_1 : A paralelogramma átlói felezik egymást.

A_2 : A négyzet paralelogramma.

B : A négyzet átlói felezik egymást.

Írjuk fel ennek a sémáját. Az A_1, A_2, B állításokat nem tudjuk felbontani a kijelentéslogika műveletei szerint és a séma a következő:

$A_1 : p$

$A_2 : q$

$B : r$

Ez helytelen következtetés a kijelentéslogikában tanultak szerint, mert p, q, r egymástól függetlenek és vehető $|p| = 1, |q| = 1, |r| = 0$.

Ugyanakkor ezt a következtetést helyesnek érezzük. A magyarázat az, hogy a kijelentéslogika nem alkalmas az ilyen és hasonló következtetések vizsgálatára.

A kijelentéslogika a kijelentések, állítások ún. **durvaszerkezetét** tárja fel, ezt vizsgálja, a predikátumlogika pedig az ún. **finomszerkezetét** a predikátumok és a logikai kvantorok (lásd 1. fejezet) használatával. A lényeges különbség tehát az, hogy a kijelentéslogikában nem szerepelnek predikátumok és logikai kvantorok, a predikátumlogikában viszont igen.

Látni fogjuk, hogy a predikátumlogikában a fenti következtetés helyessé válik.

Egy kijelentés **predikátumlogikai formalizálásán** a kijelentés szerkezetének (finomszerkezetének) felírását értjük, elemi (tovább már nem bontható) kijelentések, kvantorok és predikátumlogikai műveletek segítségével.

Példa. A fenti kijelentések így formalizálhatók: tekintsük a következő egyváltozós predikátumokat a síkbeli x négyszögek halmazán,

$P(x)$: " x paralelogramma."

$F(x)$: " x átlói felezik egymást."

$N(x)$: " x négyzet."

Ekkor

$A_1 : \forall x(P(x) \rightarrow F(x))$

$A_2 : \forall x(N(x) \rightarrow P(x))$

$B : \forall x(N(x) \rightarrow F(x))$

Más példák. i) "A 4 osztja a 12-t." kijelentés elemi, azaz felbonthatatlan a kijelentéslogikában. Azonban a természetes számok oszthatósági fogalmát ismerve így is átfogalmazható: "Létezik olyan x természetes szám, hogy $4x = 12$ ". Vagyis a finomszerkezete $\exists x P(x)$, ahol $P(x)$: " $4x = 12$ " egy 1-változós predikátum az $\mathbb{N}$ halmazon.

ii) "Minden szabályos sokszög húrsokszög, de van olyan húrsokszög, amely nem szabályos sokszög."

A kijelentést először átfogalmazzuk: "Minden sokszögre igaz az, hogy ha szabályos sokszög, akkor húrsokszög, és van olyan sokszög, amely húrsokszög és nem szabályos sokszög." Legyen: $Hx := x$ húrsokszög, $Sx := x$ szabályos sokszög, ahol az individuum-tartomány a sokszögek halmaza. Kapjuk, hogy:

$$\forall x(Sx \rightarrow Hx) \wedge \exists x(Hx \wedge \neg Sx).$$

iii) Az "Antal tanul" kijelentés finomszerkezete: $Q(a)$, ahol $Q(x)$: " x tanul" egy 1-változós predikátum személyek egy S halmazán. Itt Antal egy **individuum**, ennek jelölése a .

iv) A "Bea haragszik Cilire." kijelentést vizsgálva legyen $H(x, y)$: " x haragszik y -ra" 2-változós predikátum, jelölés még Hxy , és legyenek b (Bea) c (Cili) individuumok, ekkor a szerkezet: $H(c, d)$, vagy Hcd . Az x -et és y -t **individuumváltozóknak** nevezzük. Az **individuumtartomány** az a halmaz, amelyiken a predikátum definiált.

Ha egy predikátumban valamely individuumváltozó helyébe konkrét individuumnevet írunk, akkor **konkretizációról** beszélünk.

Vezessük be még a $d :=$ Dezső, $e :=$ Elemér individuumneveket. A $Hxy := x$ haragszik y -ra predikátum konkretizációiként kapjuk:

- (1) $Hxe := x$ haragszik Elemérré,
- (2) $Hde :=$ Dezső haragszik Elemérré.

Konkretizáció során a predikátum argumentumszáma (változószáma) csökken. Az (1) mondat egyargumentumú, a második nullaargumentumú", azaz kijelentés. Szokás az egy- és többargumentumú predikátumokat **nyitott mondatoknak**, a kijelentéseket **zárt mondatoknak** is nevezni.

Ha egy predikátumban valamely individuumváltozó helyébe egy másik individuumváltozót írunk, akkor **átjelölésről** beszélünk.

Például, a Hxy predikátumból átjelöléssel a következő predikátumokat kaphatjuk:

- (3) $Hxz = x$ haragszik z -re,
- (4) $Hyx = y$ haragszik x -re,
- (5) $Hyy = y$ haragszik önmagára.

Átjelölés során az argumentumszám vagy változatlan marad, vagy csökken.

Predikátumból kijelentést konkretizációval képeztünk. Erre egy másik lehetőség a **kvantifikáció**, azaz a logikai kvantorok használata. Például:

- (6) $\forall x Hxy =$ Mindenki haragszik y -ra.

A kvantor itt az x individuumváltozót lekötötte, ezzel egyargumentumú lett a predikátum, amelyben x -et **kötött**, y -t **szabad individuumváltozónak** nevezzük. Újabb kvantifikációval y -t is lekötöhetjük:

- (7) $\exists y \forall x Hxy =$ Valakire mindenki haragszik.

Ez már kijelentés.

6.2. Predikátumlogikai formulák. A predikátumlogikai formulák a következőképpen adhatók meg:

1. a kijelentésváltozók formulák,
2. ha P egy n -változós predikátum és $x_1, x_2, \dots, x_n$ individuumváltozók vagy individuumnevek, akkor $Px_1x_2 \dots x_n$ és $x_1 \equiv x_2$ formulák,
3. ha A és B formulák, akkor $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ és $A \leftrightarrow B$ is formulák,
4. ha A egy formula és x egy individuumváltozó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is formulák,
5. más jelsorozat nem formula.

Itt $x_1 \equiv x_2$, olvasd " x_1 azonos x_2 -vel" az **azonosságpredikátum**, amely egy 2-változós predikátum, de ennek kitüntetett szerepe van.

Figyeljük meg, hogy a 2. és 4. pontok elhagyásával a kijelentéslogikai formula definíciója adódik.

Ilyen formula például

$$A = \forall x (Sx \rightarrow Hx) \wedge \exists x (Hx \wedge \neg Sx),$$

lásd a fenti ii) Példát.

Most nézzük a **predikátumlogikai interpretációt**. Adjuk meg például a

$$B = (Pa \wedge \neg Qa) \rightarrow \exists x(Px \wedge \neg Qx)$$

formulának egy interpretációját. Legyen az individuumtartomány a valós számsorozatok $\mathcal{S}$ halmaza. A Px és Qx predikátumváltozóknak konkrét predikátumokat feleltetünk meg: Px -nek az " x korlátos sorozat", Qx -nek az " x konvergens sorozat" predikátumokat, az a -hoz pedig $\mathcal{S}$ -nek az $a_n = (-1)^n$ elemét rendeljük. Ezek után a formula egy szöveges interpretációja így hangzik: "Ha az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens, akkor létezik olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens."

E példából is kiderül, hogy egy predikátumlogikai formula interpretálása lényegesen bonyolultabb egy kijelentéslogikai formula interpretálásánál. Az individuumtartomány különféle megválasztása, a predikátumváltozók jelentésének megadása más-más interpretációt eredményez.

6.3. Következtetések a predikátumlogikában

A predikátumlogika következményrelációjának definíciója azonos a kijelentéslogikában kimondott definícióval, de itt formulán predikátumlogikai formulát, interpretáción pedig predikátumlogikai interpretációt kell érteni.

Példák. I.

(1) Minden differenciálható függvény folytonos.

(2) Az $x \rightarrow [x]$ függvény nem folytonos.

(3) Az $x \rightarrow [x]$ függvény nem differenciálható.

Egy alkalmas individuumtartomány: $I := \{\text{valós függvények}\}$. A predikátumokra és az individuumra jelöléseket vezetünk be, majd felírjuk a következtetés sémáját.

$Dx := x$ differenciálható (1) $\forall x(Dx \rightarrow Fx)$

$Fx := x$ folytonos (2) $\neg Fe$

$e := x \rightarrow [x]$ (3) $\neg De$

Tekintsük mindazokat az interpretációkat, amelyek mindkét premisszát igazgá teszik:

(1) $|\forall x(Dx \rightarrow Fx)| = 1$

(2) $|\neg Fe| = 1$.

Belátjuk, hogy ezek az interpretációk igazgá teszik a konklúziót is. (1)-ből $|De \rightarrow Fe| = 1$, (2)-ből $|Fe| = 0$ következik. Hamis utótagú implikáció akkor és csak akkor igaz, ha előtagja hamis: $|De| = 0$, ahonnan $|\neg De| = 1$. Tehát a következtetés helyes.

II. Tekintsük a fejezet elején megadott

$A_1 : \forall x(P(x) \rightarrow F(x))$

$A_2 : \forall x(N(x) \rightarrow P(x))$

$B : \forall x(N(x) \rightarrow F(x))$

következtetést.

Tegyük fel, hogy az A_1, A_2 premisszák igazak és a B konklúzió hamis. Akkor $|\forall x(N(x) \rightarrow F(x))| = 0$, innen $|\neg \forall x(N(x) \rightarrow F(x))| = 1$, $|\exists x \neg (N(x) \rightarrow F(x))| = 1$ és legyen a olyan, hogy $|\neg (N(a) \rightarrow F(a))| = 1$, azaz $|N(a) \rightarrow F(a)| = 0$, innen $|N(a)| = 1$, $|F(a)| = 0$.

Akkor erre az a individuumra $|P(a) \rightarrow F(a)| = 1$, $|(N(a) \rightarrow P(a))| = 1$ és kapjuk, hogy $|P(a)| = 0$, ugyanakkor $|P(a)| = 1$, ami ellentmondás. Tehát a következtetés helyes.

III. Helyes-e az alábbi következtetés ?

- (1) Minden 2-nél nagyobb prímszám páratlan.
- (2) Az $n = 13$ szám páratlan.

(3) Az $n = 13$ szám prímszám.

Itt a (3) konklúzió persze igaz, de az a kérdés, hogy (3) következménye-e (1)-nek és (2)-nek. Legyen az individuumtartomány $I = \{3, 4, 5, \dots\}$, $a = 13$ és $P(x)$: " x prím", $Q(x)$: " x páratlan". Ekkor a séma:

$A_1 : \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

$A_2 : Q(a)$

$B : P(a)$

Ez a következtetés nem helyes, mert más interpretáció esetén a konklúzió hamissá válhat. Pl. $a = 15$ -re a konklúzió hamis.

IV. Vizsgáljuk az alábbi következtetést:

- (1) Japán a felkelő nap országa.
- (2) Japán távol-keleti ország.

(3) A felkelő nap országa távol-keleti ország.

Ezt helyesnek ítéljük. Legyen $Tx = x$ távol-keleti ország, j =Japán, f =a felkelő nap országa. Az (1) premissza pontosabban ezt állítja: Japán azonos a felkelő nap országával. Ha ezt a kijelentést a Pxy predikátummal írjuk le, akkor a séma:

(1) Pjf

(2) Tj

(3) Tf

Ez pedig nem helyes, mert az alábbi következtetésnek ugyanez a szerkezete:

(1) 3 osztója 6-nak

(2) 3 páratlan

(3) 6 páratlan,

és ez nyilván nem helyes.

A Pxy tehát nem lehet tetszőleges predikátum, csak az azonosság-predikátum. Ekkor a séma:

(1) $j = f$

(2) Tj

(3) Tf

Ez pedig nyilván helyes.

A predikátumlogikai következtetések vizsgálatánál hasznos a szóban forgó predikátumok igazsághalmazainak ábrázolása Venn-diagramok segítségével.

Említettük az 5. fejezetben, hogy a kijelentéslogikában minden következtetésről is eldönthető véges sok lépésben, hogy helyes-e vagy sem.

A predikátumlogikában más a helyzet. A. Church, 1936-os nevezetes eredménye szerint nem lehet olyan egységes, általános eljárást adni, amelynek segítségével minden formuláról eldönthető véges sok lépésben, hogy tautológia-e vagy sem. Predikátumlogikában nem lehet általános eldöntési eljárást adni.

A predikátumlogikában is megadható a levezetés (dedukció) fogalma.

6.4. Feladatok

1. Az $Fxy := x$ figyel y -t predikátum és az $a := \text{Anna}$, $b := \text{Béla}$ individuumnevek felhasználásával írjuk le a következő kijelentések ill. predikátumok szerkezetét:

- | | |
|---|-----------------------------|
| a) Béla Annát figyel. | f) Valaki mindenkit figyel. |
| b) x mindenkit figyel. | g) Mindenki figyel valakit. |
| c) x -et mindenki figyel. | h) Bélát valaki figyel. |
| d) Valaki figyel x -et, x pedig y -t. | j) Valakit mindenki figyel. |
| e) Mindenki mindekre figyel. | |

Állapítsuk meg, hogy az egyes predikátumok hány argumentumúak.

2. A $Kxy := x$ kezét fogott y -nal predikátum és az azonosságpredikátum felhasználásával formalizáljuk az alábbi logikai függvényeket ill. kijelentéseket:

- x kezét fogott mindenki mással.
- Mindenki mindenki mással kezét fogott.
- Valaki mindenki mással kezét fogott.
- Mindenki kezét fogott valaki mással.
- Valaki valaki mással kezét fogott.

3. Formalizáljuk a következő kijelentéseket:

- Bármely konvergens sorozat korlátos.
- A korlátos monoton sorozatok konvergensek.
- Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
- A 0-ra végződő számok párosak.
- Nincsenek páratlan tökéletes számok.
- Találhatók milliónál nagyobb ikerprímek is.
- Léteznek olyan sokszögek, amelyek egyenlő oldalúak, de nem szabályosak.
- A derékszögű rombuszok a négyzetek.

4. A vizsgaidőszak valamely időpontjban aktuálissá válnak a következő kijelentéspárok:

- Mindenki vizsgázott analízisből és algebrából.
Mindenki vizsgázott analízisből, és mindenki algebrából is.
- Mindenki vizsgázott analízisből vagy algebrából.
Mindenki vizsgázott analízisből, vagy mindenki algebrából.
- Vannak, akik analízisből is, algebrából is vizsgáztak.
Vannak, akik analízisből, s vannak akik algebrából vizsgáztak.
- Vannak, akik analízisből vagy algebrából vizsgáztak.
Vannak, akik analízisből, vagy vannak, akik algebrából vizsgáztak.

Formalizáljuk a kijelentéseket. Melyek azok a kijelentéspárok, amelyek ekvivalensek?

A nem ekvivalenseket írjuk fel implikációval!

5. Helyes-e az alábbi következtetés ?

- (1) Minden konvergens sorozat korlátos.
- (2) Az $a_n = 2^n$ sorozat nem korlátos.

-
- (3) Az $a_n = 2^n$ sorozat nem konvergens.

Megoldás. A következtetés sémája:

- (1) $\forall x : (C(x) \rightarrow B(x))$
- (2) $\neg B(e)$

-
- (3) $\neg C(e)$

Ez a következtetés helyes. Tekintsük ugyanis mindazokat az interpretációkat, amelyek mindkét premisszát igazgá teszik:

$$(1) |\forall x : (C(x) \rightarrow B(x))| = 1$$

$$(2) |\neg B(e)| = 1.$$

(1)-ből $|C(e) \rightarrow B(e)| = 1$, (2)-ből $|B(e)| = 0$ következik. Hamis utótagú implikáció akkor és csak akkor igaz, ha előtagja hamis: $|C(e)| = 0$, ahonnan $|\neg C(e)| = 1$.

6. Helyes-e az alábbi következtetés ?

(1) Minden differenciálható függvény folytonos.

(2) Van olyan racionális törtfüggvény, amely differenciálható.

(3) Van olyan racionális törtfüggvény, amely folytonos.

7. ELSŐRENDŰ ÉS MAGASABBRENDŰ NYELVEK

Az egyes matematikai elméletek állításainak finomszerkezeti leírásához bizonyos szimbólumrendszerre épülő (pl. kvantorok, predikátumok, individuumváltozók, műveletek, függvények jelei, egyenlőségjel, stb.) és a célnak megfelelő "nyelvre" van szükségünk.

A predikátumlogikában, lásd 6. fejezet, a logikai kvantorok csak individuumváltozókra vonatkoznak, predikátumokra, függvényekre (műveletekre) nem. A logikának azt az ágát, amely a kvantorokat ilyen feltételekkel alkalmazza, **elsőrendű predikátumlogikának** vagy **elsőrendű nyelvnek** nevezzük. Nem csak egy, hanem sok elsőrendű predikátumlogika (elsőrendű predikátumkalkulus) van, attól függően, hogy milyen predikátumokat, illetve függvényeket engedünk meg.

Megjegyezzük, hogy a kijelentéslogikát, amelyben nincsenek kvantorok, **nulladrendű nyelvnek** is nevezzük.

Egy $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv (predikátumlogika) szimbólumai következők:

- (1) az individuumváltozók jelei: $x_1, x_2, \dots$,
- (2) a logikai műveletek jelei: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$,
- (3) az egyenlőségjel: $=$,
- (4) a kvantorok jelei: $\forall$ és $\exists$,
- (5) zárójelek: $(,)$,
- (6) k -változós ($k \geq 0$) predikátumok jelei: $P, Q, \dots$, amelyek egy $\mathcal{P}$ halmazt alkotnak,
- (7) konstansjelek: $a, b, c, \dots$
- (8) n -változós ($n \geq 1$) függvények jelei (műveleti jelek): $f, g, \dots$, amelyek egy $\mathcal{F}$ halmazt alkotnak.

A $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ párt az $\mathcal{L}$ nyelv típusának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy 0-változós predikátumjelek itt a kijelentésváltozók jelei. Az individuumkonstansok jelei: $a, b, c, \dots$ felfoghatók úgy is mint nullaváltozós függvényjelek, de ezeket a fentiekben külön megadtuk (7)-tel. Az (1)-(5) ún. **logikai szimbólumoknak** minden elsőrendű nyelvben kell szerepelniük. A (6)-(8) ún. **nem logikai szimbólumok** jelenléte és száma már az adott nyelv céljaitól függ. Megtörténhet az is, hogy egyáltalán nem használunk (6)-(8) típusú szimbólumokat, tehát lehet $\mathcal{P} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \emptyset$.

Az egyenlőségjel is tulajdonképpen egy 2-változós predikátumjel, de ennek kitüntetett szerepe van. A megfelelő predikátumot **azonosságpredikátumnak** nevezzük, jelölés $x \equiv y$, olvasd x azonos y -nal, lásd 7. szakasz.

A fentiek alapján látható, hogy egy elsőrendű nyelv megadható a nem-logikai szimbólumok felsorolásával.

Példák. 1) Az *tiszta egyenlőség* $\mathcal{L}_=$ *nyelve* egyáltalán nem használ nem-logikai szimbólumokat.

2) A *halmazelmélet* $\mathcal{L}_S$ *nyelve* egyetlen 2-változós predikátumjelet használ és ez a $\in$ ("elem").

3) A *csoportelmélet* $\mathcal{L}_G$ *nyelve* az 1 konstansjelet (egységelem), az inverzképzés 1-változós és a szorzás 2-változós függvényjelét használja.

4) A *természetes számok* $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ *nyelve* egy 0 konstansjelet és három műveleti jelet használ. Ezek a rákövetkeztetés egyváltozós S , az összeadás kétváltozós $+$ és a szorzás kétváltozós $\cdot$ jele.

Az $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv szimbólumaival **formulákat** szeretnénk szerkeszteni, amelyek majd az adott elmélet állításait formalizálják (ezek finomszerkezetét adva meg).

Mielőtt azonban definiálnánk a formulákat, szükségünk van az ún. **kifejezés** fogalmára.

Az $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv **kifejezései** a következők:

- (1) az individuumváltozók jelei,
- (2) a konstansok jelei,
- (3) ha $k_1, \dots, k_n$ kifejezések és f egy n -változós függvényjel, akkor $f(k_1, \dots, k_n)$ is kifejezés,
- (4) minden kifejezés előáll az (1)-(3) véges számú alkalmazásával.

Az $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv **formulái** a következőképpen adhatók meg:

- (1) ha $k_1, \dots, k_n$ kifejezések, P pedig egy predikátum, akkor $P(k_1, \dots, k_n)$ formula
- (2) ha k_1 és k_2 kifejezések, akkor $t_1 = t_2$ formula,
- (3) Ha φ formula, akkor $\bar{\varphi}$ is formula,
- (4) Ha φ, ψ formulák, akkor $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ is formulák,
- (5) Ha φ egy formula és x egy változójel, akkor $\forall x\varphi$ és $\exists x\varphi$ is formulák,
- (6) minden formula előáll a (1)-(5) véges számú alkalmazásával.

Az (1)-(2) típusú formulák az $\mathcal{L}$ nyelv **atomi formulái**.

Ezekből a fogalmakból kiindulva definiálhatók és vizsgálhatók a 6. fejezetben megadott fogalmak általánosításai, pl. szabad és kötött változók, zárt formula, változó helyettesítése, predikátumlogikai formulák kiértékelése (interpretációja), stb.

8. BOOLE-ALGEBRÁK

Legyen $(A, \wedge, \vee)$ egy algebrai struktúra, ahol $\wedge$ és $\vee$ bináris műveletek és tegyük fel, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok:

- (1) $(A, \wedge)$ és $(A, \vee)$ kommutatív félcsoporthok, azaz mindkét művelet asszociatív és kommutatív,
- (2) minden $x, y \in A$ esetén: $x \wedge (x \vee y) = x$ és $x \vee (x \wedge y) = x$ (**elnyelési** vagy **abszorbcíós** tulajdonságok).

Ekkor az $(A, \wedge, \vee)$ struktúrát **hálónak** nevezzük, amely **egységelemes háló**, ha az $\wedge$ műveletre nézve létezik egy 1-gyel jelölt semleges elem (egységelem): $x \wedge 1 = x$ minden $x \in A$ -ra. $(A, \wedge, \vee)$ **zéruselemes háló**, ha a $\vee$ műveletre nézve létezik egy 0-val jelölt semleges elem: $x \vee 0 = x$ minden x -re.

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \wedge, \vee)$ zéruselemes és nem egységelemes háló, ahol $x \wedge y = (x, y)$, az x és y legnagyobb közös osztója, $x \vee y = [x, y]$ pedig az x és y legkisebb közös többszöröse. A zéruselem az 1 szám: $x \vee 1 = [x, 1] = x$ minden x -re.

2) Ha M egy halmaz, akkor $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ zéruselemes és egységelemes háló, ahol $\cap$ és $\cup$ a halmazokra vonatkozó metszet és egyesítési műveletek. A zéruselem az üres halmaz, az egységelem pedig az M .

3) $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ zéruselemes és egységelemes háló, ahol 0 és 1 a logikai értékeket jelöli, $\wedge$ és $\vee$ pedig a logikai konjunkció, illetve diszjunkció műveletek.

4) $(\text{Pred } A, \wedge, \vee)$ zéruselemes és egységelemes háló, ahol $\text{Pred } A$ az A halmazon értelmezett egyváltozós predikátumok (azaz $P : A \rightarrow \{0, 1\}$ függvények, itt 0 és 1 a logikai értékek) halmaza, $\wedge$ és $\vee$ pedig a predikátumok konjunkciója, illetve diszjunkciója.

A háló úgy is definiálható, mint relációs struktúra: az $(A, \leq)$ rendezett halmaz háló, ha A minden kételemű részhalmazának létezik infimuma és létezik szuprémuma a rendezési reláció szerint.

A megegyező elnevezést a következő Tétel indokolja:

Tétel. a) Ha az $(A, \leq)$ rendezett halmaz háló, akkor az

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}, \quad a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad \forall a, b \in A$$

előírások bináris műveleteket értelmeznek az A halmazon és az $(A, \wedge, \vee)$ algebrai struktúra háló.

b) Fordítva, ha az $(A, \wedge, \vee)$ algebrai struktúra háló, akkor az

$$a \leq b \iff a \wedge b = a, \quad \forall a, b \in A$$

előírás egy relációt értelmez az A halmazon, az $(A, \leq)$ struktúra háló és minden $a, b \in A$ esetén

$$a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Az $(A, \wedge, \vee)$ hálót **disztributív hálónak** nevezzük, ha minden $a, b, c \in A$ esetén

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

A fenti 1)-4) Példákban szereplő hálók disztributívak.

Az A háló **Boole-háló** (vagy **Boole-algebra**), ha A disztributív, létezik $0 = \min A$ legkisebb elem, létezik $1 = \max A$ legnagyobb elem és minden $a \in A$ esetén létezik $a' \in A$ úgy, hogy $a \wedge a' = 0$ és $a \vee a' = 1$. Jelölés: $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$.

Tétel. Ha A Boole-háló, akkor

a) Minden $a \in A$ esetén létezik egyetlen $a' \in A$ úgy, hogy $a \wedge a' = 0$ és $a \vee a' = 1$. Az a' elemet az a **komplementumának** nevezzük.

b) $0' = 1$, $1' = 0$, $(a')' = a$,

c) Minden $a, b \in A$ esetén,

$$(a \wedge b)' = a' \vee b', \quad (a \vee b)' = a' \wedge b'$$

(de Morgan képletek).

Például $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ Boole-háló és $X \subseteq M$ komplementuma az X -nek M -re vonatkozó kiegészítő halmaza: $\mathbb{C}_M X$.

Az $(A, +, \cdot)$ asszociatív egységelemes gyűrűt **Boole-gyűrűnek** nevezzük, ha $x^2 = x$ minden $x \in A$ esetén.

Tétel. Ha $(A, +, \cdot)$ Boole-gyűrű, akkor

a) $1 + 1 = 0$ (tehát $x + x = 0$ minden $x \in A$ esetén).

b) A kommutatív.

Bizonyítás. a) $1 + 1 = (1 + 1)^2 = 1 + 1 + 1 + 1$, tehát $1 + 1 = 0$.

b) Ha $x, y \in A$, akkor $x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + y + xy + yx$, tehát $xy = -yx$; mivel $1 = -1$, következik, hogy $xy = yx$. $\square$

A következő tétel azt mutatja, hogy a Boole-háló és a Boole-gyűrű fogalmak egyenértékűek.

Tétel. (Stone-tétel) a) Legyen $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$ egy Boole-háló és definiáljuk a következő műveleteket:

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$$

$$a \cdot b = a \wedge b.$$

Ekkor $(A, +, \cdot)$ Boole-gyűrű, amelynek zérusa 0 és egységeleme 1.

b) Legyen $(A, +, \cdot, 0, 1)$ egy Boole-gyűrű, és definiáljuk a következő műveleteket:

$$a \vee b = a + b + ab, \quad a \wedge b = ab.$$

Ekkor $(A, \vee, \cdot)$ Boole-háló amelyben $a' = 1 + a$, $\min A = 0$ és $\max A = 1$.

c) Az a) és b) pontokban értelmezett megfeleltetések egymásnak inverzei.

Példák. 1) $(\mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}, +, \cdot)$ Boole-gyűrű, ahol a $+$ és a $\cdot$ modulo 2 értendő, lásd 1. fejezet, és a megfelelő Boole-háló műveletek

$\vee$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\wedge$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$'$	
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

Ezek éppen a logikai diszjunkció, konjunkció és negáció műveletek.

2) A $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \emptyset, M, \mathbb{C})$ Boole-hálónak megfelel a $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ Boole-gyűrű, ahol $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ az A és B szimmetrikus különbsége.

A fentiekből kiindulva olyan algebrai módszerek adhatók meg, amelyek jól használhatók a matematikai logikában.

További irodalom

1. Kamarás Lajos, Matematikai bevezetés, JPTE Pécs, 1996.
2. Klukovics Lajos, Bevezető fejezetek a matematikába, egyet. jegyzet, JATE Kiadó, Szeged, 1989.
3. Pásztorné Varga Katalin, Logikai alapozás alkalmazásokhoz, egyet. jegyzet, ELTE, Budapest, 1992.
4. Szendrei Ágnes, Diszkrét matematika, Polygon, Szeged, 2000.
5. Szendrei János, Algebra és számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
6. Szendrei János, Tóth Balázs, Bevezetés a matematikai logikába, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1996.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Logikai alapfogalmak	2
1.1. Kijelentések	2
1.2. Műveletek kijelentésekkel	2
1.3. Műveleti tulajdonságok	4
1.4. Predikátumok, műveletek predikátumokkal	4
1.5. Logikai kvantorok	5
1.6. Feladatok	6
2. Halmazok	18
2.1. Halmazok	8
2.2. Műveletek halmazokkal	8
2.3. Műveleti tulajdonságok	18
2.4. Descartes-szorzat, hatványhalmaz	9
2.5. Predikátumok igazsághalmazai	9
2.6. Feladatok	10
3. Relációk	12
3.1. Relációk, példák relációkra	12
3.2. Műveletek relációkkal	12
3.3. Reláció metszetei	13
3.4. Homogén relációk tulajdonságai	13
3.5. Ekvivalenciarelációk és osztályozások	14
3.6. Rendezési relációk	14
3.7. Feladatok	15
4. Függvények	17
4.1. A függvény fogalma	17
4.2. Karakterisztikus függvény	17
4.3. Injektív, szürjektív és bijektív függvények	18
4.4. Feladatok	18
5. Kijelentéslogika	19
5.1. További logikai műveletek	19
5.2. Kijelentéslogikai formulák	20
5.3. Normálformák	22
5.4. Kijelentéslogikai tautológiák	23
5.5. Kijelentéslogikai következtetések	23
5.6. Következtetési sémák	24
5.7. Következtetések vizsgálata	25
5.8. Bevezetés a kijelentéslogikában	26
5.9. Feladatok	28
6. Predikátumlogika	30
6.1. Durvaszerkezet és finomszerkezet	35
6.2. Predikátumlogikai formulák	31
6.3. Következtetések a predikátumlogikában	32
6.4. Feladatok	34
7. Elsőrendű és magasabbrendű nyelvek	36
8. Boole-algebrák	38
További irodalom	40